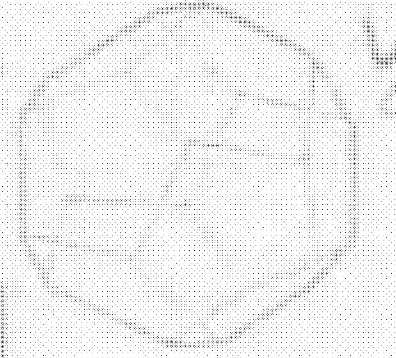
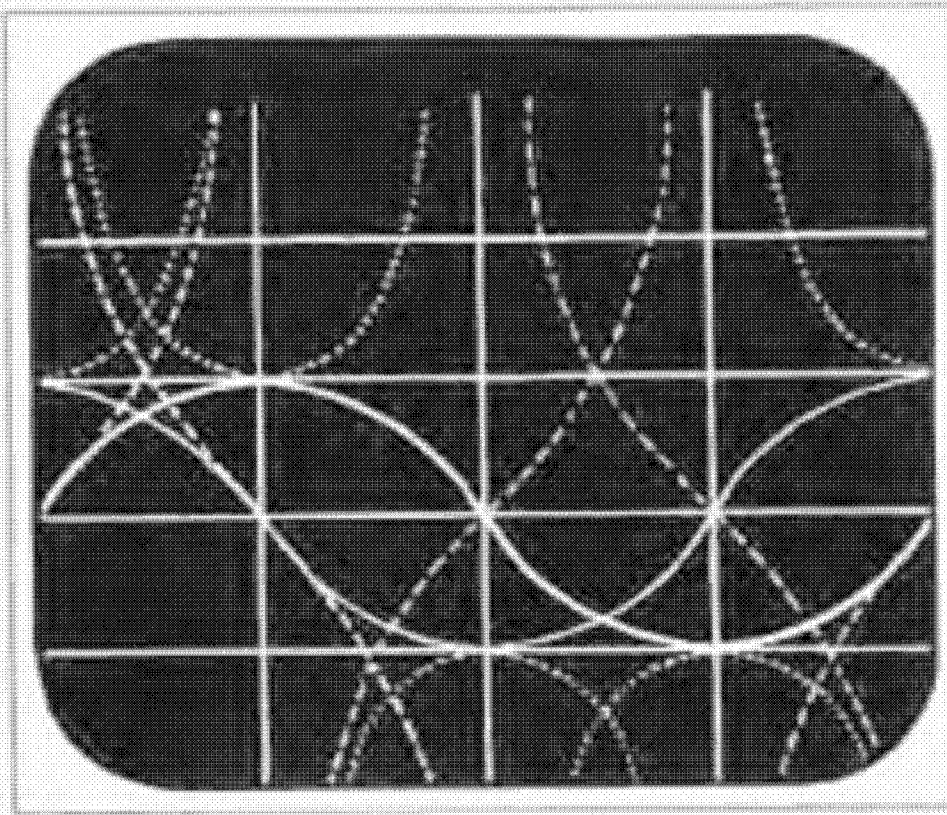
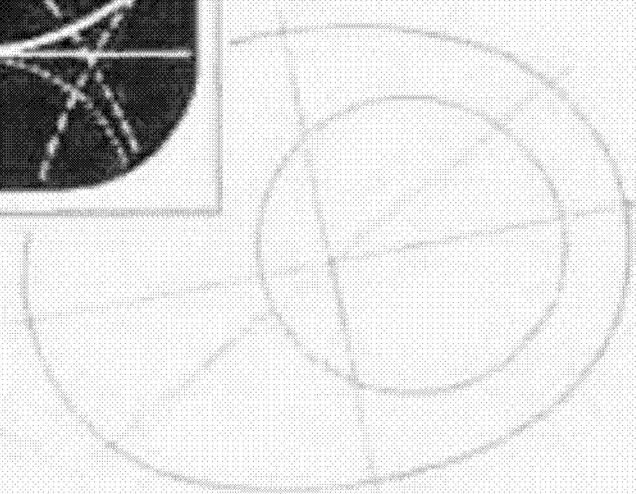
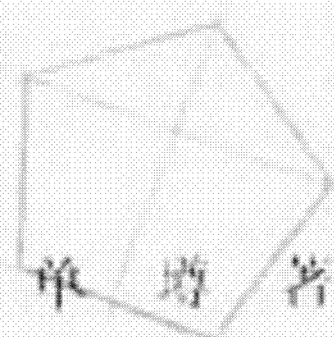
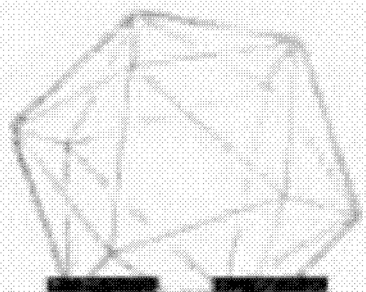




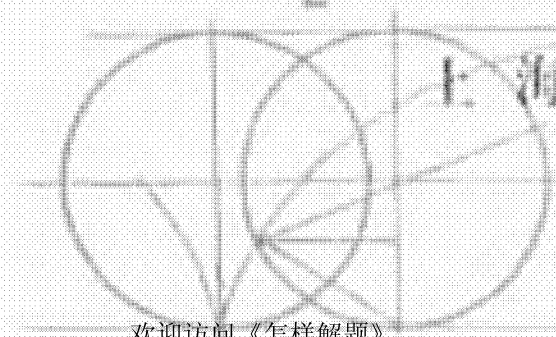






单 墫 著

平面几何中的小花



上 海 教 育 出 版 社

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

平面几何中的小花

单 墫



上海教育出版社

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

图书在版编目(CIP)数据

平面几何中的小花/单墫著. —上海:上海教育出版社,2002.5

ISBN 7-5320-8236-9

Ⅰ.平... Ⅱ.单... Ⅲ.平面几何-普及读物
Ⅳ.O123.1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第031084号

平面几何中的小花

单 墫

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州永新印刷包装有限责任公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 129,000

2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷

印数 1～5,150本

ISBN 7-5320-8236-9/G・8291 定价:8.50元

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

前　　言

数学大花园里，几何是最美丽的部分．我们从平面几何中撷取几朵小花，供大家欣赏，其中有我们近期遇到的问题，也有著名的经典结果．

各节之间没有特别紧密的联系．内容较为接近的，归入一章．本来没有章名，后来写了两首歪诗，权当章名．一首是：

“数学花园大，
几何算一家．
春日兴致好，
请来看小花．”

作　者

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

目　录

(一)数学花园大……1
1. 帕普斯定理……1
2. 帕斯卡定理……2
3. 无穷远点……4
4. 笛沙格定理……6
(二)几何算一家……7
5. 对称……7
6. 多么奇妙的一颗星……8
7. 面积问题(一)……9
8. 面积问题(二)……11
9. 中心对称……12
10. 部分与整体相似……13
11. 对角线的中点与面积……14
12. 处处留心皆学问……15
13. 圆规作图……17
14. 闭折线的长……18
15. 正方形中的四个点……20
16. 跳出框框……23
17. 海外称王……25
18. 整齐与对称……26
(三)春日兴致好……29
19. 昂蒂费尔师傅的奇遇……29
20. 重心……31

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

21. 塞瓦定理 …………………………………………… 32
22. 爱因斯坦认为优雅的证明 ………………………… 34
23. 三角形的五心 ……………………………………… 36
24. 垂心的一个性质 …………………………………… 37
25. 逐步推广 …………………………………………… 38
26. 垂心乎？（一） …………………………………… 40
27. 垂心乎？（二） …………………………………… 41
28. 位似、欧拉线……………………………………… 42
29. 九点圆 ……………………………………………… 44
30. 西摩松线 …………………………………………… 44
31. 欧拉公式 …………………………………………… 45
32. 拿破仑定理 ………………………………………… 47
33. 蝴蝶定理 …………………………………………… 49
34. 平方差与根轴 ……………………………………… 51
(四)请来看小花 ……………………………………… 53
35. 完全不用三角 ……………………………………… 53
36. 掩卷一思 …………………………………………… 54
37. 意料之外 …………………………………………… 55
38. 平行四边形 ………………………………………… 56
39. 边界形状 …………………………………………… 57
40. 求角的值(一) ……………………………………… 59
41. 求角的值(二) ……………………………………… 62
42. 求角的值(三) ……………………………………… 63
43. 求角的值(四) ……………………………………… 64
44. 一道习题的编制 …………………………………… 66
45. 相切的圆串 ………………………………………… 67
46. 阿基米德的一个定理 ……………………………… 69

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

47. 平分周长 …… 70
48. 学校选址(一) …… 72
49. 学校选址(二) …… 74
50. 黄蓉分饼(一) …… 77
51. 黄蓉分饼(二) …… 78
52. 垂心? …… 79
53. 寻找简单的证明 …… 82
(五)学海无涯 …… 85
54. 加法定理 …… 85
55. 余弦 …… 86
56. 角平分线与外接圆 …… 87
57. 又是角平分线 …… 89
58. 注意几何意义 …… 91
59. 得用三角 …… 94
60. 2000年中国数学奥林匹克试题 …… 95
(六)乐作舟 …… 98
61. 吴伟朝先生的问题 …… 98
62. 圆的位似中心 …… 99
63. 马尔法提问题 …… 101
64. 叶中豪先生的问题 …… 102
65. 国际会议上的问题 …… 103
66. 孙斌勇同学的问题 …… 104
67. 寺庙里的几何题(一) …… 109
68. 寺庙里的几何题(二) …… 110
69. 寺庙里的几何题(三) …… 116
70. 五圆定理与四圆定理 …… 124
71. 俄罗斯杀手 …… 126

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

(七)逍遥自在…………………………………………………… 130
72. 一道波兰竞赛题…………………………………………… 130
73. 直角三角形内一点………………………………………… 131
74. 平方和……………………………………………………… 132
75. 六点共圆…………………………………………………… 133
76. 三线共点与三点共线……………………………………… 135
77. 比…………………………………………………………… 136
78. 何时 $OH=2R$? ………………………………………… 138
79. 直线与圆相切……………………………………………… 139
80. 圆内接四边形对边之差…………………………………… 140
81. 等角共轭点………………………………………………… 142
82. 凸六边形…………………………………………………… 144
83. 直线与圆相切……………………………………………… 145
84. 三个四边形的面积………………………………………… 147
85. 俄罗斯竞赛题(一)………………………………………… 148
86. 俄罗斯竞赛题(二)………………………………………… 150
(八)任我游……………………………………………………… 154
87. 逆平行线…………………………………………………… 154
88. 共轭重心(一)……………………………………………… 156
89. 共轭重心(二)……………………………………………… 158
90. 塔克圆……………………………………………………… 159
91. 莱莫恩圆…………………………………………………… 160
(九)已觉此处景物好…………………………………………… 162
92. 四点间的距离……………………………………………… 162
93. 笛卡儿关于圆的定理……………………………………… 164
94. 笛沙格定理的证明………………………………………… 165
95. 五点确定二次曲线………………………………………… 167

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

96. 帕斯卡定理的证明 …… 170
(十)更有好景 …… 173
97. 格点多边形 …… 173
98. 直线的条数 …… 174
99. 两人博弈 …… 174
100. 同色的等腰三角形 …… 176
101. 折纸穿针 …… 177
102. 先猜后证 …… 179
103. 距离为有理数 …… 180
104. 覆盖 …… 181
(十一)在前头 …… 184
105. 问题征解(一) …… 184
106. 问题征解(二) …… 184

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（一）数学花园大

1. 帕普斯定理

数学，是一门博大精深的学问. 学习它的最好方法是自己去发现它.

很多几何定理，可能就是在随便画画当中产生的.

如果你有直尺，随意画两条直线 l_1，l_2（图 1）. 然后在 l_1，l_2 上轮流地各取 3 个点. 即 A_1，A_3，A_5 在 l_1 上；A_2，A_4，A_6 在 l_2 上. 这六个点构成一个自身相交的六边形（闭折线），即如图连接 A_1A_2、A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6，A_6A_1. A_1A_2 与 A_4A_5 相交于 D，我们简记作

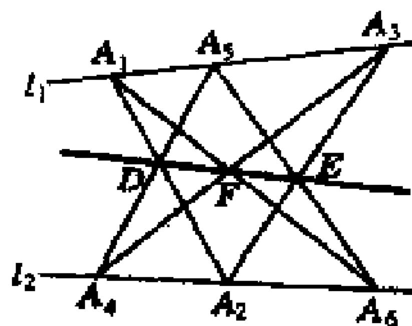


图 1

$$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D.$$

同样，$A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$，$A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$.

D，E，F 三点的位置有什么特点？

它们似乎在一条直线上. 用直尺比划一下，果真如此！

这是偶然的吗？

如果你再画一个图，情况仍然如此. 于是你就发现了一个定理：

定理 在直线 l_1 上任取三点 A_1，A_3，A_5，在直线 l_2 上任取三点 A_2，A_4，A_6，$A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$，$A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$，$A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$，那么 D，E，F 三点共线.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

不过这一定理早已有人发现过.它称为帕普斯(Pappus)定理.帕普斯是公元3世纪时希腊的数学家.

虽然你发现的定理早已有人发现,不必为此沮丧.我国大数学家华罗庚在自学的过程中就常常重复别人的发现(如复变函数中的柯西定理).他觉得自己能独立发现这些定理,正说明自己与历史上著名的数学家有同样的水平,因而对前途充满了信心.

从本节至第4节,我们将介绍三个几何定理(帕普斯定理是第一个).这些定理是著名的,因此学习几何的人都应当知道.这些定理是优美的,我们应当多加欣赏.这些定理有不少应用,但在中学阶段(包括数学竞赛)却很少用到.不过,如果能够用上,问题多半迎刃而解(这就好像核武器,几乎派不上用场,但二战末期偶尔一用,日本鬼子就举手投降了).这些定理的证明往往都不容易,但在有关书中不难查到.所以这里我们也不急于给出证明.不过,如果你有兴趣看到本书最后几节,也会找出一种证明.

2. 帕斯卡定理

"人只不过是一根苇草,是自然界最脆弱的东西;但他是一根能思想的苇草.我们全部的尊严就在于思想.由于思想,人囊括了宇宙,思想形成人的伟大."

——帕斯卡《思想录》

任作一个圆(图2).在圆上任取六点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.设 $A_1A_2 \cap A_4A_5 = D$, $A_2A_3 \cap A_5A_6 = E$, $A_3A_4 \cap A_6A_1 = F$,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

则有

D, E, F 三点共线.

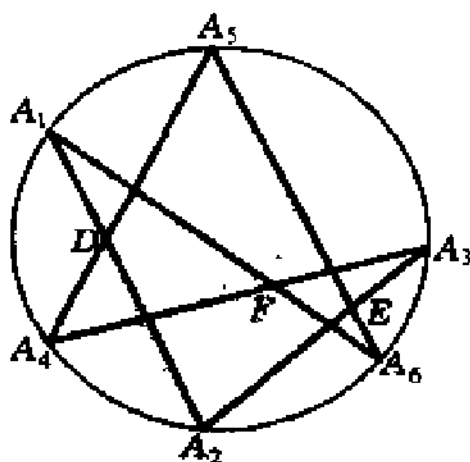


图 2

类似的结论，对于椭圆、双曲线、抛物线也同样成立. 而在双曲线蜕化成两条相交直线（或抛物线蜕化成两条平行直线）时，上述结论就变成帕普斯定理.

于是，我们有如下定理：

定理 如果一个六边形内接于一条二次曲线（椭圆、双曲线、抛物线），那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

这一定理称为帕斯卡定理.

布莱斯·帕斯卡（1623.6.19—1662.8.19），是一位天才. 在 16 岁左右（约 1639 年）就发现了上述定理.

帕斯卡是概率论的奠基人之一. 他 18 岁时，发明并制造了历史上第一架计算机. 25 岁左右，发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理. 他还是一位杰出的文学家，他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏. 但从 31 岁起，他的主要精力用于神学，沉缅于宗教狂热之中.

帕斯卡定理中的六边形，可以是图 2 中自身相交的六边形，也可以是图 3 中的常见的简单多边形.

帕斯卡定理有种种特殊的情况. 例如 A_1 与 A_2 重合，A_5 与 A_6 重合，就得到（图 4）：

圆内接四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 对边 A_1A_5，A_3A_4 的交点 F，A_1 处切线与 A_4A_5 的交点 D，A_5 处切线与 A_1A_3 的交点 E，三点共线.

如果图 3 中 A_1 与 A_2 重合，A_3 与 A_4 重合，A_5 与 A_6 重

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

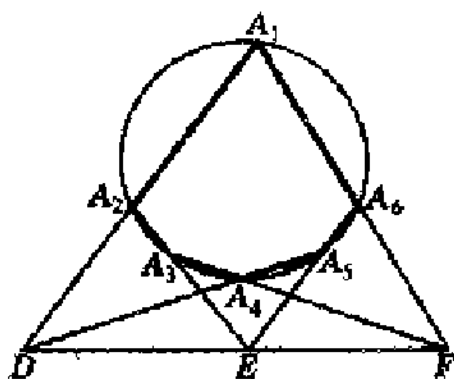


图 3

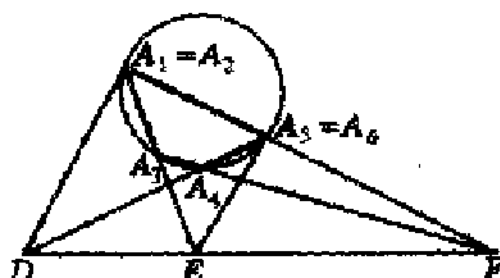


图 4

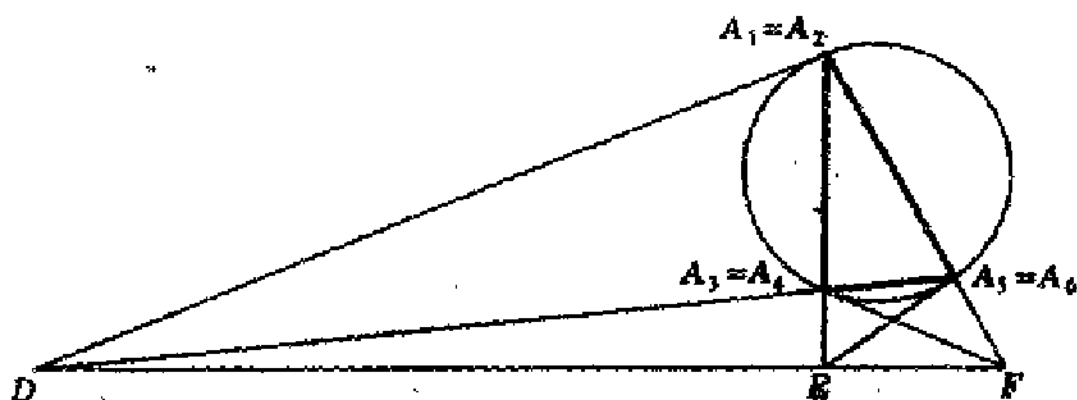


图 5

合，就得到(图 5)：

圆内接三角形，每一顶点处的切线与对边的交点，这三点共线.

70 年代，国内曾有人在杂志上发表了一些“新”定理，以为是“前贤所未曾发现的”.其实都是帕斯卡定理的特殊情况.

3. 无穷远点

“数学的统一性及简单性都是极为重要的.因为数学的目的，就是用简单而基本的词汇去尽可能多

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

地解释世界.归根结底，数学仍然是人类的活动而不是计算机的程序.如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话，我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一."

——M·阿蒂亚《数学的统一性》

清晨，一束阳光照进了教室.

光线是平行的，但它们来自于同一个光源——太阳，也就是它们相交于同一点(太阳).

当然，太阳并不是几何学中的没有形状大小，只有位置的点.光线也不是严格意义下的平行直线.但与日、地之间的距离相比，太阳的半径显得很小，可以将太阳当作一个点.并且，可以说平行直线相交于*无穷远点*.

通常几何中，平面上的两条直线或者相交，或者平行.引入无穷远点，就可以将这两种说法统一起来：

平面上任意两条直线有且仅有一个交点.

如果交点是无穷远点，那么两条直线就是平行直线.

通常还约定：

一组平行线(一束光线)相交于同一个无穷远点.另一组平行线，相交于另一个无穷远点.过两个无穷远点的直线称为*无穷远线*.所有的无穷远点都在这条无穷远线上.

引进无穷远点带来许多便利.例如在帕斯卡定理中，如果边 $A_1A_2 // A_4A_5$，那么图3中的 D 就是无穷远点.这时帕斯卡定理仍然成立，其中直线 EF 过无穷远点 D，也就是 $EF // A_1A_2$.如果不用无穷远点，就需要将这些"例外"情况一一列出，弄得支离破碎，十分乏味.而有了无穷远点，全可以统一成一种叙述，即上节的帕斯卡定理.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

4. 笛沙格定理

如果$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$的对应顶点的连线A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3交于同一点O，那么对应边的交点必定共线，即：设A_2A_3与B_2B_3交于C_1，A_3A_1与B_3B_1交于C_2，A_1A_2与B_1B_2交于C_3，则C_1，C_2，C_3三点共线(图6).

这个定理称为笛沙格(Desargues)定理.

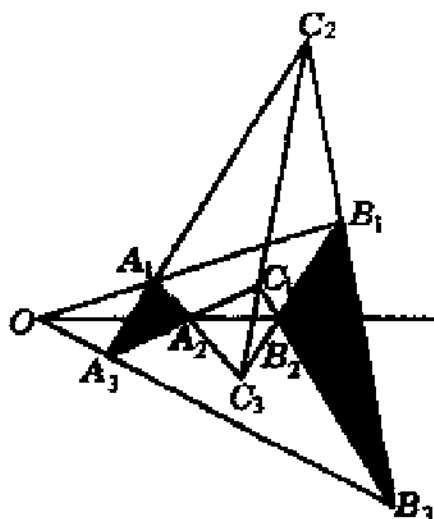


图 6

定理中的O点称为透视中心，处于定理所说位置的$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$称为透视的.

笛沙格定理在证明三点共线时很有用处(如第76节).它的证明很多,本书将在第94节给出一个证明.

笛沙格定理的逆也是正确的.即：

如果$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$的对应边的交点C_1,C_2,C_3共线，那么这两个三角形是透视的.

笛沙格定理的逆可以用同一法来证.但更简单的办法是注意$\triangle A_1B_1C_3$与$\triangle A_3B_3C_1$，它们是透视的，透视中心是C_2.因而根据笛沙格定理，对应边的交点A_2，B_2及A_1B_1与A_3B_3的交点O，三点共线.换句话说，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3三线共点，$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$是透视的.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（二）几何算一家

5. 对　　称

几何学是优美的.对称，就是一种美.

一圆的竖直位置的直径向右移a厘米，水平直径向上移b厘米.这两条直线将圆分成四份.考虑最大一份与最小一份的面积之和及其他两部分面积的和.求这两个和的差.

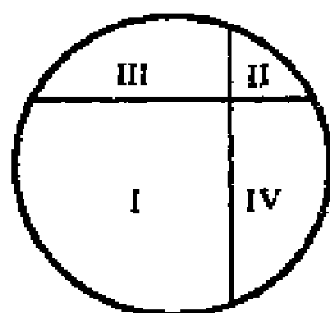


图　7

显然左下的一份最大，右上的一份最小.

为了计算差，最好利用对称.

从 I 中去掉一块等于 III，从 IV 中去掉一块等于 II.这样只需计算 V 比 VI 大多少.

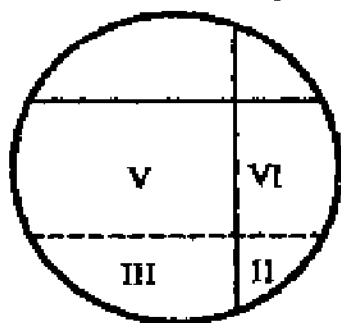


图　8

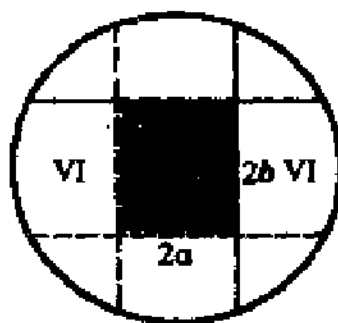


图　9

再从 V 中去掉一块等于 VI.剩下一个长方形，长为 $2a$，宽为 $2b$，面积为

$$2a\times 2b=4ab.$$

即所求的差为 $4ab$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

6. 多么奇妙的一颗星

你打过弹子球(台球)吗?

即使自己没有打过,多半也看过别人打台球.电视里也常有台球比赛的实况转播.

台球的原理是反射定律,即当球击到球台的边缘时,球按照

“反射角等于入射角”

的规律而反弹,如图10所示.

图中与桌面垂直的虚线称为法线.入射线与法线的夹角α称为入射角;反射线与法线的夹角β称为反射角.

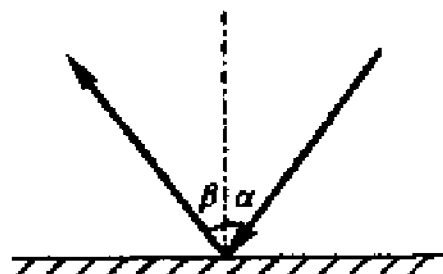


图 10

道理虽然简单,运用起来却不容易.一个高手可以打出许多花样,得出意料不到的效果.球的轨迹可以形成美妙的曲线,例如正三角形、五角星等等.台湾一位小说家夏烈在他的短篇名著《多么奇妙的一颗星》中,通过一位台球高手的两次击球写出了人生的况味(他还写过一个脍炙人口的短篇《白门》.夏烈先生的母亲就是写《城南旧事》的林海音女士).

通常的台球桌是长方形的.现在(请设想一下)有一个正三角形的台球桌.一位台球高手夸耀说:

“我曾在这样的球桌上,将球从桌边击出,沿三个不同方向通过同一点,然后回到出发点.”

这位选手说的事情能否发生?他有没有说牛?

如果这件事不可能发生,多半要用反证法来证明(假定这件事发生,如何如何,最后导出矛盾).如果这件事可能发生,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

多半用构造法，即举出一个实例.

问题是事先不知道答案，需要判断究竟是能还是不能.

判断只有依靠经验与实践.

如果你恰好知道有一个这样的图形，那么问题便迎刃而解. 否则只能反复尝试，看看能否构造出一个符合要求的图形. 如果怎么也造不出，那么或许要用反证法证明这样的图形不存在. 如果无法用反证法否定这种图形的存在，那么或许这种图形是存在的，再尝试构造符合要求的图形. 这样试来试去，经过多次失败，最终会取得成功.

很可能一位小学生或初中生，会比年龄大的人先获得成功，如果他或她有很好的数学感觉.

答案是这种图形是存在的. 请再努力构造一下，然后再看下面的图 11.

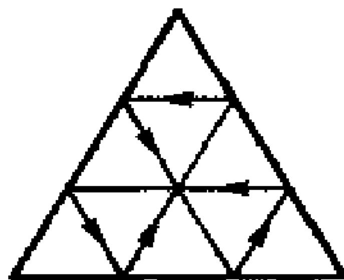


图 11

7. 面积问题(一)

如图 12，正方形边长为 10. 一条长为 9 的线段 AB，端点在这正方形的两条邻边上. 在 A 下面 3 处作水平线，在 B 左面 2 处作垂直线，得到 C，D. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

这是一道日本小学算数奥林匹克的问题. 小学生可以做，但高中生却也未必做得好.

不要把问题想得过于复杂，不要引用过多的知识(例如勾

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

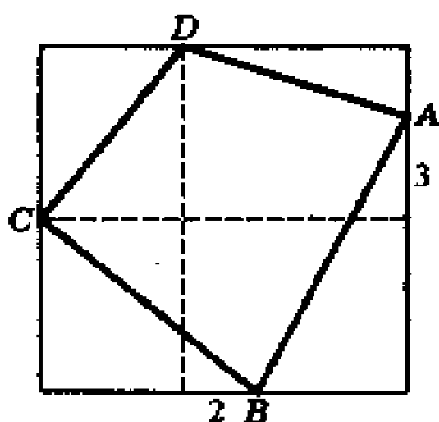


图 12

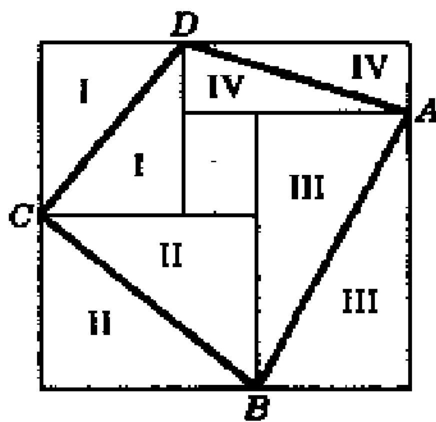


图 13

股定理).

小学生不会犯引用过多知识的错误，他们所能利用的只是面积割补，面这也就足够了.

如图 13，由于矩形被对角线分成两个面积相等的三角形，所以两个 I 相等，两个 II 相等，两个 III、两个 IV 也都分别相等. 四边形 $ABCD$ 比正方形的其余部分多出一个矩形的面积. 这个矩形，其长、宽分别为 3，2，所以面积是

$$3\times2=6.$$

从面四边形 $ABCD$ 的面积是

$$(100+6)\div2=53.$$

另一种解法(初中学生常会采用)是设未知数.

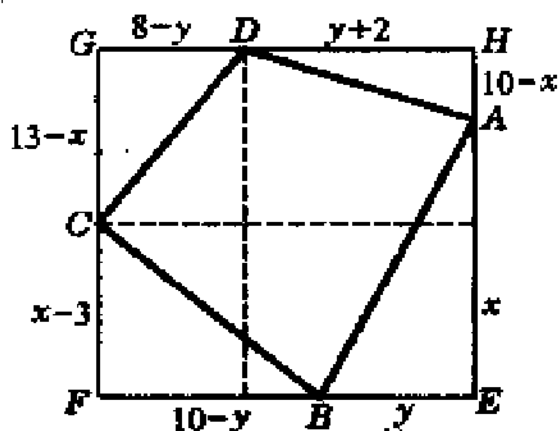


图 14

如图 14，设 $AE=x$，$EB=y$，则其他线段 BF 等可用 x 或 y 的代数式表出，从而正方形去掉面边形 $ABCD$ 后，所得四个三角形的面积和是

$$\frac{1}{2}[xy+(x-3)(10-y)+(13-x)(8-y)+(y+2)(10-x)]. \quad ①$$

经过化简，式中含 x 或 y 的项全部抵消，结果是一个常数 47

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$\left(=\frac{1}{2}(13\times 8+2\times 10-3\times 10)\right)$.

从而四边形 $ABCD$ 的面积是

$$100-47=53.$$

有趣的是①实际上是与 x,y 无关的常数，所以并不需要列方程，消去未知数(未知数已经自动消去).

如果是填空题，还有一种猜答案的方法，即假定 B 是正方形的顶点，如图 15 所示.

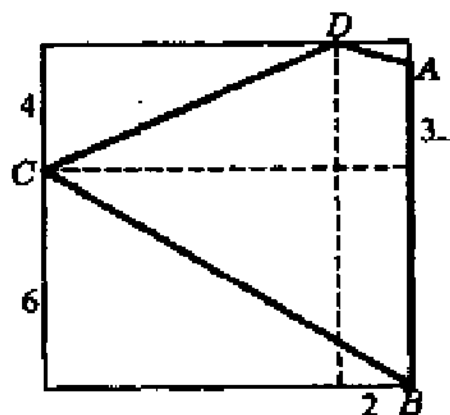


图 15

这时易算出去掉四边形 $ABCD$ 后，所得三个三角形的面积和是

$$\frac{1}{2}(10\times 6+4\times 8+2\times 1)=47,$$

从而四边形 $ABCD$ 的面积是

$$100-47=53.$$

这种解法的优点是借助于特殊情况，很快求出一个解. 在答案是唯一时，有了一个解也就有了全部解. 缺点是这种解法并非证明不论 AB 位置如何，答案都是一个. 如果有两个或更多个解，那么结论就不完整了.

应该说，第一种解法是简单. 当然，简单并不意味容易想到.

本题的结果实际上与 AB 的长，以及 AB 的倾斜程度无关.

8. 面积问题(二)

如图 16，两个边长相等的正方形各被分成 25 个大小相同的小方格. 现将这两个正方形的一部分重叠起来，若左上角的阴影部分(点状)面积为 5.12cm^2. 右下角的阴影部分(线状)面积为 7.4cm^2，求大正方形的面积.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

本题如没有正确的方法，不仅十分棘手，而且多半得不出答案.

设点状面积为 A，线状面积为 B，在这两部分之间的面积为 C，则 A,C 共有 14(不包括被 B 围住的、右下的那一个)方格. 而 B,C 共有 17(=18−1)个方格(同样不包括右下的那一个方格).

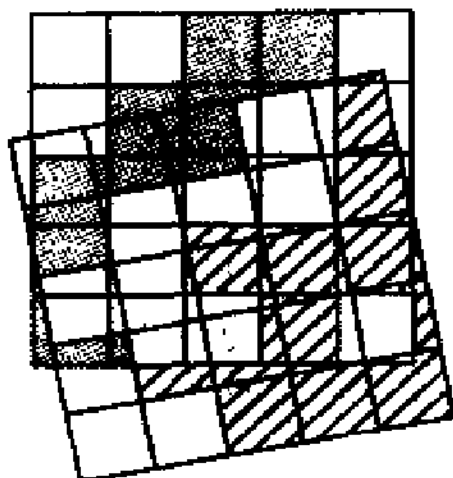


图 16

因此，一个方格的面积是

$$(7.4-5.12)\div(17-14)=0.76(\mathrm{cm}^2).$$

大正方形的面积是

$$0.76\times5^2=19(\mathrm{cm}^2).$$

本题是第六届上海"从小爱数学"邀请赛的试题，由上海钟建国老师提供.

"从小爱数学"是小学高年级学生的竞赛，但这道题却未必每个高中学生都能做好，可见从小培养对数学的兴趣、感觉，是一件非常重要的事.

9. 中 心 对 称

如图17，设 D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，E，F 分别在 AC，AB 上. 证明：

$$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \qquad ①$$

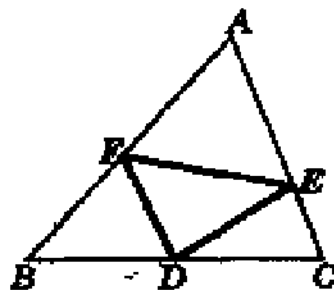


图 17

本题不算很难，证法也很多. 应当寻找尽可能简单的证法.

我们利用中心对称(条件"D 是 BC

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

的中点"启示我们这样做).

以D为对称中心,设A,E,F的(关于中心D的)对称点分别为A',E',F'(图 18),即分别延长AD、ED、FD到A',E',F',使$DA'=AD$,$DE'=ED$,$DF'=FD$.

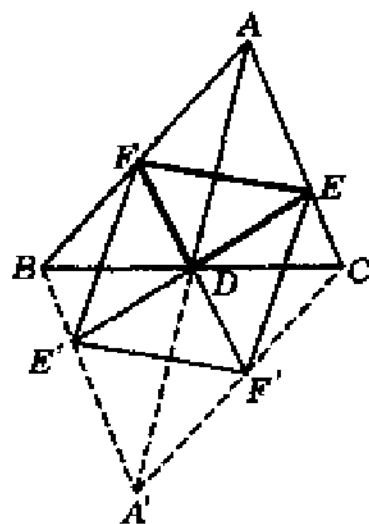


图 18

因为B的(关于D的)对称点是C,所以AB关于D的对称图形是$A'C$.F在AB上,所以F'在$A'C$上(也可以用$F'A'/\!/FA$,$F'C/\!/FB$证明F',A',C共线).

同理E'在$A'B$上.

显然四边形$A'CAB$,$E'F'EF$都是平行四边形,所以

$$\begin{aligned}2S_{\triangle DEF}&=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DE'F'}\\&=\frac{1}{2}S_{\square E'F'EF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square A'CAB}\\&=S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$

即①成立.

当E,F分别与A,B重合(或分别与C,A重合)时,①中等号成立.

10. 部分与整体相似

一个三角形不会与它的一部分全等,但却可能与它的一部分相似.

设K为$\triangle ABC$内一点(图 19),如果$\triangle KBC$与原三角形相似,应当满足哪些条件?

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

首先，$\angle BKC > \angle A$. 不妨设 $\angle BKC = \angle BCA = \beta + \varphi$. 由于 $\angle ABC > \alpha$，所以必须有 $\angle ABC = \beta$. 从而 $\angle A = \alpha$，即 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 最小的角.

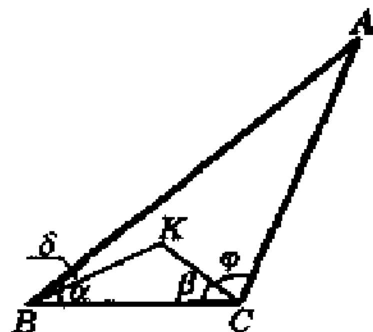


图 19

因此，设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最小的角，$\angle C$ 是最大的角，作 $\angle CBK = \alpha$，$\angle KCB = \angle ABC$，BK，CK 相交于 K，则

$$\triangle BCK \backsim \triangle ABC. \qquad ①$$

即每一个三角形内都可以找到一点 K，使得 K 与某两个顶点所成的三角形与原三角形相似.

如果图 19 中，$\delta = \alpha$，$\varphi = \beta$，那么当①成立时，$\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 分别为 α，2α，4α. 因为

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180°,$$

所以 $\triangle ABC$ 的三个角分别为 $\frac{180°}{7}$，$\frac{2\times180°}{7}$，$\frac{4\times180°}{7}$. 即如果 $\triangle ABC$ 的内心与某两个顶点所成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，那么 $\triangle ABC$ 的三个角必定是 $\frac{180°}{7}$，$\frac{2\times180°}{7}$，$\frac{4\times180°}{7}$.

11. 对角线的中点与面积

凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于 K. 如果面积和

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle DKA}, \qquad ①$$

那么 K 是 AC 或 BD 的中点.

问题不难. 但入手的第一步应特别留心，不宜过于草率. 否则会做得很繁，事倍功半.

如果 K 不是 AC 的中点，设 M 是 AC 的中点(图 20). 易知

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$S_{\triangle CKD}-S_{\triangle DKA}$

$=(S_{\triangle CMD}+S_{\triangle MDK})$

$-(S_{\triangle DMA}-S_{\triangle MDK})$

$=2S_{\triangle MDK}$.　　②

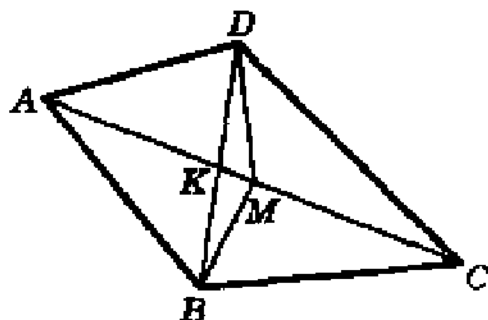


图　20

同理，

$S_{\triangle BKC}-S_{\triangle AKB}=2S_{\triangle MBK}$.　　③

由①，②，③，

$$S_{\triangle MDK}=S_{\triangle MBK},$$

从而 K 是 BD 的中点.

反过来，当 K 为 AC 或 BD 的中点时，①显然成立. 可以证明满足①的点 K 的轨迹就是过 AC、BD 中点的直线，称为牛顿线（当然，需要约定面积是所谓的"有向面积"，即当 A，K，B 三点成逆时针方向时，约定 $S_{\triangle AKB}$ 为正；当 A，K，B 三点成顺时针方向时，$S_{\triangle AKB}$ 为负）.

12. 处处留心皆学问

学习，应当不断地提出问题，"于无疑处有疑"，切勿轻易放过那些可以动动脑筋的机会.

这里举两个简单有趣的几何作图中的问题：

"过直线 l 外一点 A 作 l 的平行线."

这样的作图，初中同学人人学过. 我们应该再进一步，提出新的要求——"至少要画几条线，就可以完成上述作图？"

这里的线指直线或圆（弧），并且作图工具只有圆规与（没有刻度的）直尺，不允许用三角板推.

答案是三条线.（请读者先想一想，试一试，然后再看下面的解答.）

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

作法如下：

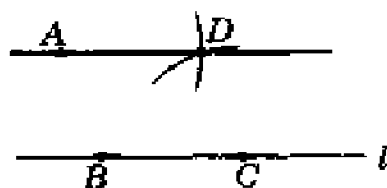


图 21

如图 21，在 l 上任取两点 B,C. 分别以 A,C 为圆心，BC,BA 为半径作圆，两圆(与 A 在 l 同侧)的交点为 D，过 A,D 作直线.

易知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 AD 就是所求的平行线.

我们一共作了三条线：两个圆弧，一条直线. 能不能减少一条线呢？不能！因为最后总要作一条直线，它由 A 及另一点 D 确定；而定出 D 点必须两条线，所以至少要作三条线.

类似地，还可以考虑：

“过点 A 作直线 l 的垂线，至少要作几条线(只允许用圆规、直尺，不允许用三角板)？”

解答分两种情况：

(i) A 在 l 外. 通常的作法需要四条线. 但是，只要我们多想一想，可以知道用三条线就足够了. 如图 22，在 l 上任取两点 B,C，分别以 B,C 为圆心，BA,CA 为半径画弧，相交于(异于 A 的)点 D，则 AD 就是 l 的垂线.

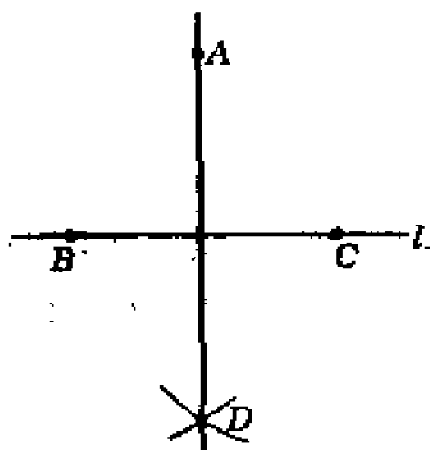


图 22

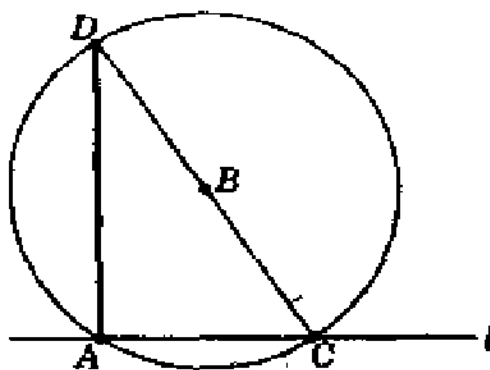


图 23

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

(ii) A 在 l 上. 上面的作法不再适用，必须另辟蹊径.

在 l 外任取一点 B，以 B 为圆心，BA 为半径作圆，交 l 于(异于 A 的)点 C(如果这圆与 l 相切于 A，那么 BA 就是 l 的垂线). 过 C 作$\odot B$ 的直径 CD，则直线 DA 即为所求(图 23).

与前一个问题道理相同，三条线是最少的.

上面的两道作图题虽不困难，但也不一定很快就能想到正确的答案. 在学习的过程中应当多思，多问，处处留心皆学问.

13. 圆 规 作 图

单用圆规，可以作出所有尺规作图(用直尺、圆规)能作的点.

本节介绍两个单用圆规的作图.

1. *已知正方形 $ABCD$ 的顶点 A,C，求作 B,D.*

设 $AC=1$. 如图 24，作$\odot(A,1)$，$\odot(C,1)$相交于 E，F；作$\odot(E,EF)$分别交$\odot(A,1)$，$\odot(C,1)$于 G，H；作$\odot(H,HA)$交$\odot(A,1)$于 I；最后作$\odot(G,GI)$，$\odot(H,GI)$相交于 C，D. 则 C，D 即为所求.

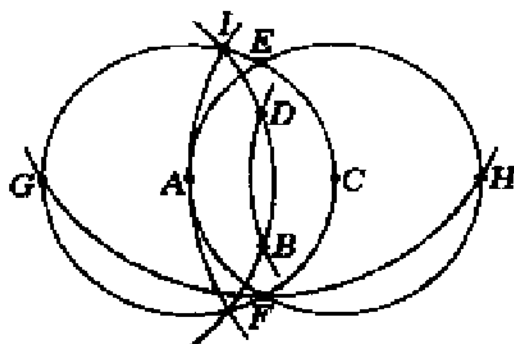


图 24

证明需用余弦定理. 易知 $EF=\sqrt{3}$，G，H 在连心线 AC 上. 对$\triangle GAI$ 与$\triangle HAI$ 用余弦定理，

$$GI^2=1^2+1^2+2\cos\angle IAH$$
$$=2+\frac{2^2+1^2-2^2}{2\times 1}=\frac{5}{2}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

而对于正方形 $ABCD$ 的顶点 B，有

$$GB^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

所以图中得到的 B，D 的确是正方形 $ABCD$ 的顶点.

2. 已知⊙O 及其圆心 O，将圆四等分.

设⊙O 的半径为 1.

如图 25，在⊙O 上任取一点 A，作⊙$(A,1)$交⊙O 于 B，C；作⊙$(B,1)$交⊙O 于 D，交⊙A 于 E；作⊙(D,DA)，⊙(E,EO)相交于 G；最后，作⊙(B,BG)交⊙O 于 I，H.

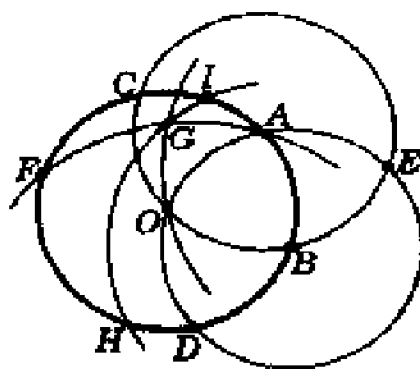


图 25

证明不难：易知

$$DA=EO=\sqrt{3},$$

$$BG=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}.$$

注意我们只作了5个圆.

14. 闭折线的长

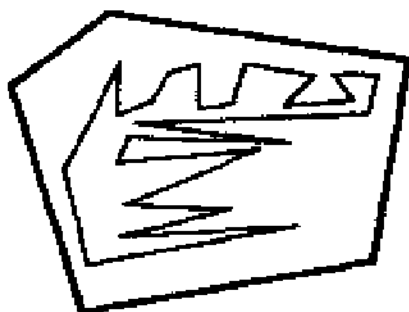
大家都知道，两点之间的路程以连接这两点的线段为最短. 这是课本中的一个重要定理.

从生活中，还知道兜一个大圆子比兜一个小圈子远. 确切一点，可以叙述成下面的定理：

定理 *闭折线的长≥包含在其中的凸的闭折线的长. 等号仅在两者重合时成立.*

这个定理中，里面的闭折线必须是凸的（即成凸多边形），否则结论不成立. 如图 26，里面的折线弯了许多次，总长比

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com


图 26

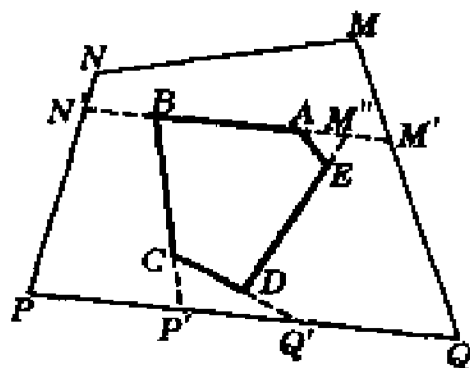


图 27

外面的折线长.

这个定理怎么证明?

大家都知道如何切饼.切饼就是我们的证法.如图 27,凸闭折线 $ABCDE$ 在闭折线 $MNPQ$ 中.先沿 AB 切一刀,切去图中的四边形 $MNN'M'$.由于

$$M'M+MN+NN'\geqslant M'N',$$

所以只要证明

闭折线 $M'N'PQ$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

再沿 BC 切一刀,切去 $BP'PN'$,同样有

$$BN'+N'P+PP'\geqslant BP'.$$

只要证明

闭折线 $M'BP'Q$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

这样继续下去,一刀一刀地切,直至最后只剩下闭折线 $ABCDE$.显然

闭折线 $ABCDE$ 的长 $=$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

因此

闭折线 $MNPQ$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

而且只要所述两条闭折线不重合.上面切的过程中至少有一个不等式是严格的不等式.从而

闭折线 $MNPQ$ 的长 $>$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

换句话说，仅在两条闭折线重合时，两者的长相等.

15. 正方形中的四个点

正方形 $ABCD$，边长为 1. E，F，G，H 是正方形中的四个点，每两点之间的距离不小于 1. 求证 E，F，G，H 是正方形 $ABCD$ 的四个顶点.

本题有多种解法. 有些人试图用面积来证，做得很复杂还没有成功. 这条道路恐怕是没有多少希望的. 因为边长$\geqslant 1$ 的四边形，面积未必大于 1(甚至可能很接近于零，在四边形"很扁"，接近于一条线段时，便出现这种情况). 即使增加种种限制(将两点间的距离用余弦定现表示)，要从面积突破也是徒然. 如果这条道路没有希望，那就不必坚持非走不可，不如及早抽身为好.

判别一条道路能否走通，需要有识别能力. 这种能力往往来自于经验与感觉. 如果越走越繁，越做越难，没有任何成功的曙光，多半已经走错了路，离了正题.

为了不走错路，一开始应当多考虑几个方案，估量一下哪一种方案最有实现的可能. 切忌"慌不择路"，一头扎进死胡同，而又不能"迷途知返".

在本题中，既然总要用到线段的长(即两点的距离)，不如直接就用线段的长来解.

第一种解法是利用三角形的余弦定理.

四边形 $EFGH$ 的内角和为 $360°$，其中必有一个角$\geqslant 90°$. 设$\angle EFG\geqslant 90°$，则

$$EG\geqslant \sqrt{EF^2+FG^2}\geqslant \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

边长为 1 的正方形中，两点间最长的距离为 $\sqrt{2}$. 当且仅

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

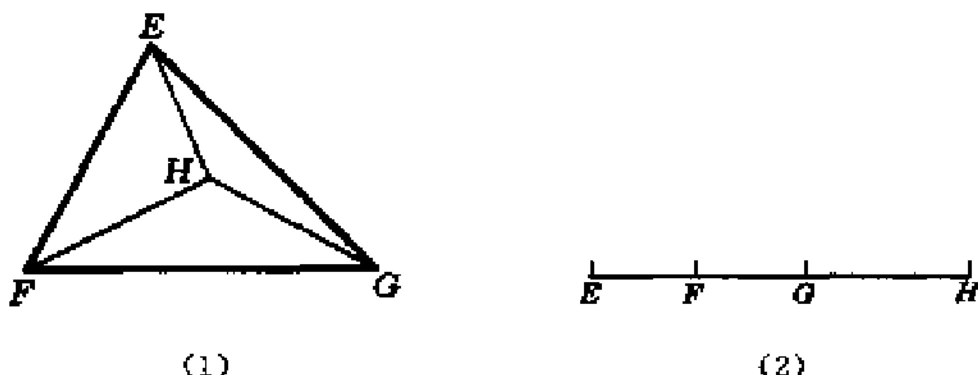
当这两点是相对的两个顶点时，距离为$\sqrt{2}$.

因此，E,G 是正方形的顶点 A,C.

到 E,G(即 A,C)距离均$\geqslant 1$ 的点，不在以 A 为圆心，1 为半径的圆的内部，也不在以 C 为圆心，1 为半径的圆的内部. 在正方形 $ABCD$ 中，这样的点只有两个，即这两个圆的交点 B,D. 因此 F,H 必与这两点重合.

不少学生认为这题做到这里已经完成. 其实在上面的证明中暗中假定了四边形 $EFGH$ 是凸四边形.

如果 E,F,G,H 不构成凸四边形，那么有两种可能：



(1)　　(2)

图　28

(1) 点 H 在$\triangle EFG$ 内[图 28(1)]. 这时$\angle EHF$, $\angle FHG$, $\angle GHE$ 的和是 360°，其中必有一个$\geqslant 120°$. 设$\angle EHF\geqslant 120°$，则 $EF\geqslant\sqrt{1^2+1^2+2\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}>\sqrt{2}$.

(2) 四点在同一条线段上[图 28(2)]. 这时

$$EH=EF+FG+GH\geqslant 1+1+1=3.$$

由于正方形 $ABCD$ 中，两点间的距离$\leqslant\sqrt{2}$，所以上述两种情况均不可能发生.

一般说来，包含 n 个点的最小的凸(多边)形称为这 n 个点的凸包. 四个点的凸包，有上述三种，即凸四边形、三角形、线段(还有一种极特殊的情况：四点重合成一个点).

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

其实 E,F,G,H 成凸四边形的情况，可以利用上一节提到的一个常用的定理：

闭折线的长大于或等于被它包含的凸的闭折线的长．等号仅在两者重合时成立．

因为凸折线 $EFGH$ 的长 $\geqslant 1+1+1+1=4=$ 正方形 $ABCD$ 的周长，所以由这个定理立即得出 E,F,G,H 是正方形的四个顶点．

泰州中学的学生还提出一个新的证明：

考虑正方形 $ABCD$ 的外接圆．圆心 O 到各顶点距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．E,F,G,H 都在正方形内，当然也在 $\odot O$ 内．不妨设 OE,OF,OG,OH 为依逆时针顺序的四条线段．$\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 中至多有一个不小于 $180°$．不妨设前三个角都小于 $180°$．

由于 $EF\geqslant 1=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\geqslant\sqrt{OE^2+OF^2}$，所以 $\angle EOF\geqslant 90°$．同样 $\angle FOG$，$\angle GOH$ 都不小于 $90°$．因而 $\angle HOE<180°$．同样 $\angle HOE\geqslant 90°$．由于 $\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 的和是 $360°$，所以这四个角都等于 $90°$，而且 $OE=OF=OG=OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$．因为正方形中只有四个顶点在外接圆上，所以 E,F,G,H 就是四个顶点．

解题时，学生常有新的、不同的解法．教学相长，互相学习决不是一句空话．

上述解法中，应注意 $\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 中可能有大于或等于 $180°$ 的．这就是 E,F,G,H 不成凸四边形的情况．论证需要细致，不可出现漏洞．

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

16. 跳出框框

在解题讨论班中，下面的问题，曾经引起很热烈的讨论：

如图 29，已知凸六边形 $AA'BB'CC'$ 中，

$$\angle A=\angle A',\angle B=\angle B',\angle C=\angle C', \quad ①$$

并且

$$AA'=AC',BA'=BB',CB'=CC'. \quad ②$$

求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{AA'BB'CC'}$.

图 29

很多学员发现要证明的结论就是

$$S_{\triangle A'AB}+S_{\triangle B'BC}+S_{\triangle C'CA}=S_{\triangle ABC}. \quad ③$$

因此希望将$\triangle A'AB$、$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 都“折到”$\triangle ABC$ 中，如果 A'，B'，C' 恰好重叠成一个点 M，那么③就成立了.

但是怎么证明 A'，B'，C' 重叠成一个点 M 呢？

有人认为将$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 折起来可以形成一个四面体，而

$$\begin{aligned}\angle A'+\angle B'+\angle C'&=\angle A+\angle B+\angle C\\&=\frac{1}{2}\times\text{六边形的内角和}\\&=\frac{1}{2}\times(6-2)\times180^\circ=360^\circ, \quad ④\end{aligned}$$

所以这个“四面体”的三个面正好成为一个面.

上面的想法，的确是自然的好想法. 但在逻辑上却有个大漏洞：

三个三角形：$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 能折成四面体

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

吗？

$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$ 能折成顶点为 B 的三面角 $B—AA'C$（即 $B—AB'C$）需要条件，即

$$\angle ABC < \angle A'BA + \angle B'BC. \qquad ⑤$$

当 $\angle A'BA$，$\angle B'BC$ 都很小（都小于 $\frac{1}{2}\angle ABC$）时，就无法产生三面角 $B—AA'C$. 面题目的条件关于 $\angle A'BA$，$\angle B'BC$ 的大小，没有提供任何信息，所以无法证明可以折成上面所说的四面体.

能否改一下，作 A' 关于 AB 的对称点 M，再证明 M 也是 B' 关于 BC，C' 关于 CA 的对称点？

这条路可以走通，但非常麻烦，面且失去了原来想法中很可贵的东西：A'，B'，C' 地位是平等的.

思想还得解放一些. 为什么我们非把三个三角形：$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 装进 $\triangle ABC$ 这个框子里呢？

如果思想上没有这一个预先设定的框框，事情要好办得多.

另外开放一块地方，即任选一点 M，过 M 作射线 MA''，MB''，MC''，使

$$\angle A''MB'' = \angle AA'B, \angle B''MC'' = \angle BB'C$$

（请读者自己绘一草图）.

这时，由于④，

$$\begin{aligned}\angle C''MA'' &= 360° - \angle A''MB'' - \angle B''MC'' \\ &= 360° - \angle AA'B - \angle BB'C = \angle CC'A.\end{aligned}$$

再取定 A''，B''，C''，使

$$MA'' = AA', MB'' = BB', MC'' = CC'.$$

这时容易证明

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\triangle A'AB \cong \triangle MA''B'',\ \triangle B'BC \cong \triangle MB''C'',$$
$$\triangle C'CA \cong \triangle MC''A''.$$

即我们已经将$\triangle A'AB$,$\triangle B'BC$,$\triangle C'CA$ 拼成一个三角形,即$\triangle A''B''C''$.

剩下的事情是证明

$$\triangle A''B''C'' \cong \triangle ABC. \qquad ⑥$$

这是很容易的,因为在前面所得的全等三角形中对应边相等,所以

$$A''B''=AB,\ B''C''=BC,\ C''A''=CA. \qquad ⑦$$

于是由⑦得出⑥,从而③成立,本题结论成立.

跳出框框,另觅一块天地发展,是这种解法的主要思想.其实这就是几何证明中的"同一法".

17. 海 外 称 王

隋朝末年,天下大乱,群雄逐鹿.《风尘三侠》中的老大虬髯客(另两位是红拂与唐朝开国元勋李靖)也想问鼎中原.但后来见到李世民,自问不是他的敌手,便退到海外,到扶余国去称王了.

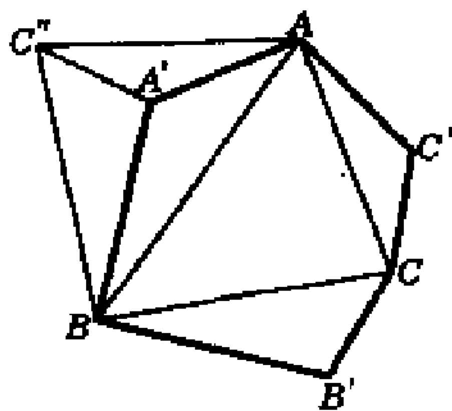


图 30

上节的问题,在$\triangle ABC$ 的框框内难以做文章.除了另找一点 M 外,还可以退到边上去,即绕 A 点,将$\triangle AC'C$ 旋转成$\triangle AA'C''$(图 30).

这时 $A'C''=CC'=CB'$,$BA'=BB'$,

$$\begin{aligned}\angle C''A'B &= 360^\circ-\angle AA'B-\angle AA'C''\\ &= 360^\circ-\angle AA'B-\angle C'=\angle B',\end{aligned}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

所以 $$\triangle A'BC'' \cong \triangle B'BC.$$

再由 $BC''=BC, AC''=AC$ 得出

$$\triangle ABC'' \cong \triangle ABC.$$

从而 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABC''}=\frac{1}{2}S_{AA'BB'CC''}.$$

本节的解法与上节类似，只不过将 M 选在 A'，图形紧凑些，但对称性却不如上节.

与占据"中原"的$\triangle ABC$ 相比，辅助线构成的图，只占一隅之地. 然而只要经营得好，反而能解决在$\triangle ABC$ 中难以解决的问题.

18. 整 齐 与 对 称

在几何计算中，应注意式子的整齐与对称.

设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c. P 为三角形内一点，过 P 作三边的平行线，截各边于 D, E, F, G, H, I（图 31）. 如果 $DE=FG=HI$，试求 DE.

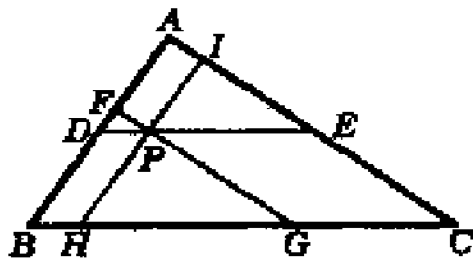


图 31

设 $DE=x$，又记 $PE=p, PF=q, PH=r$. 由平行线性质，易知

$$\frac{x}{a}=\frac{c-r}{c} \quad ①$$

及

$$\frac{x}{a}=\frac{b-(x-q)}{b}. \quad ②$$

①即

$$\frac{x}{a}=1-\frac{r}{c}. \quad ③$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

同理有

$$\frac{x}{b}=1-\frac{p}{a}, \quad ④$$

$$\frac{x}{c}=1-\frac{q}{b}. \quad ⑤$$

③+④+⑤得

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3-\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right). \quad ⑥$$

②即

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{q}{b}. \quad ⑦$$

同理

$$x\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{r}{c}, \quad ⑧$$

$$x\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=1+\frac{p}{a}. \quad ⑨$$

⑦+⑧+⑨得

$$2x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right). \quad ⑩$$

⑥+⑩得

$$3x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=6.$$

于是 $$x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{2abc}{ab+bc+ca}.$$

解答中的"同理"就体现了整齐性、对称性.由于我们注意到这种整齐性、对称性,选择了适当的字母记号,所以只要将字母 a,b,c 及 p,q,r 进行轮换就可以由③得出④,⑤,由⑦得到⑧,⑨,并且最后恰好由⑥与⑩消去 p,q,r,求出 x.如果不注意这种整齐性、对称性,不仅计算繁复,而且茫无头绪,不知

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

出路何在.

另一种解法是利用三角形的高(当然也要注意式子的整齐与对称).

设 P 到各边的距离为 p_a, p_b, p_c,三角形的高为 h_a, h_b, h_c,则

$$\frac{x}{a}=\frac{h_a-p_a}{h_a},$$

即

$$h_a \cdot x=ah_a-ap_a.$$

将类似的三个等式相加,得

$$(h_a+h_b+h_c)x=3\times 2S_{\triangle ABC}-2S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ABC}.$$

所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{4S_{\triangle ABC}}{h_a+h_b+h_c} \\ &= \frac{4S_{\triangle ABC}}{\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}+\frac{2S_{\triangle ABC}}{b}+\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \end{aligned}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（三）春日兴致好

19. 昂蒂费尔师傅的奇遇

天气好，兴致也好的时候，可以读点书（包括小说书与数学书）.

法国的儒勒·凡尔纳写过很多科普小说，不仅普及了科学知识，而且小说的情节曲折、引人入胜；人物性格鲜明、栩栩如生. 令人爱不释手，非得一气读完不可. 其中《格兰特船长的儿女》、《神秘岛》、《十五岁的船长》等更是倾倒了我国四、五代读者（清末即有梁启超译的《十五岁的船长》在《新民丛报》上连载. 鲁迅、周作人也曾译过《地心游记》).

在他写的《昂蒂费尔师傅奇遇记》（孔昭宇、马河清译，中国青年出版社，1981 年出版）一书中，昂蒂费尔师傅等人为了寻求宝藏，历尽艰险，先后来到马斯喀特、马永巴、斯匹次卑尔根三个岛. 但每一次都只找到一个金属匣，里面藏着一片羊皮纸，指示应当到下一个岛去寻找宝藏. 最后一次找到的羊皮纸已经被水浸湿一半. 前一半指出：

"……共同遗产继承人可直奔第四个小岛，三只装有黄金、钻石、珠宝的橡木桶就藏在该岛."

但指示小岛位置的部分由于被水浸湿，字迹已模糊不清了，只能看出：

"小岛……位于……几何……定理……."

好不容易辨认出最后一个字是：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

“极”.

大家无法猜测出小岛的位置，乘兴而来，兴尽而返.

回到家中，又过了两个多月.参与此事的朱埃勒和他的妻子爱诺卡特，偶然拨弄放在桌上的地球仪，无意中发现上面所说的三个小岛位于同一个圆上.朱埃勒恍然大悟(以下对译文稍作修改)：

“我们设想这三个小岛在同一平面上，用直线将它们两两相连，在每条线段的中央划一条垂线，这些垂线正好相交在圆心上.在地球仪上，也就是这个圆的极.第四个小岛肯定就在这一点！”

于是，他们发现第四个小岛，即卡米尔克总督藏宝的地方位于北纬三十七度二十六分，东经(以巴黎子午线为准)十度三十三分.

宝藏的下落，请读者去看原书，这里按下不表.且说一说上面涉及的几何定理，即

三角形三条边的垂直平分线交于一点，这点称为三角形的外心.以它为圆心，可以作一个圆通过三角形的三个顶点.这个圆称为三角形的外接圆.

因此，任意三个(不共线的)点(即三角形的三个顶点)，都在同一个圆上.经过两个多月的冥思苦想，朱埃勒才发现三个小岛位于同一个圆上，他的几何未免太差了，大概抵不上我国参加中考的学生.

不过，三个小岛是在球面上.把它们设想在一个平面上，第四个岛是圆的圆心.如果在地球仪上，那么包含第四个岛的部分就像罩在这个圆上的“瓜片小帽”，而第四个岛就是帽子的顶(清朝的官员在顶子上放一块宝石)，也就是“极”.所以在球面上，极与圆心还是不同的(如果过圆心作一条直线与圆所

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

在的平面垂直，这条直线正好通过极）．在绘制平面的地图时，球面上的图形不可避免地产生变形．要在地图上寻找“极”，不是容易的事情．

顺便说一下，第四个小岛称为尤利亚岛．1831 年在地中海中突然升起，正当英国和意大利为岛的主权争吵不休的时候，这个岛又突然消失了，只在海面上露了四个多月．我国作家鄂华曾以此为背景写过一个中篇小说《幽灵岛》．

20．重　　心

如果两个小球 A，B 重量相等，那么它们的重心是 AB 的中点 D（这里我们将小球当作一个点）．即设想 A，B 用一个杆相连，顶住杆 AB 的中点 D 就可以达到平衡［图 32(1)］．



图　32

如果球 A，B 的重量不等，重量的比是 $\frac{m}{n}$，那么重心 D 仍在 AB 上，而 $\frac{AD}{DB}=\frac{n}{m}$（即重心靠近重的一方）［图 32(2)］．

如果三个重量相等的小球 A，B，C 构成三角形 ABC，要求它们的重心，在物理上可以分成两步：

先求出 B，C 的重心，即 BC 的中点 D，可以用重量为 $2(=1+1)$ 的小球放在 D 点，取代（去掉）放在 B，C 的小球．

再求 A，D 的重心．由于 D 处的重量是 A 处的 2 倍，所以重心 G 在 AD 上，并且分 AD 为 $2:1$（即 $AG=2GD$）．

当然，也可以先求出 A，B 的重心 F，再求 C，F 的重心（在 F 处放重量为 2 的小球）．或先求出 A，C 的重心 E，再求 B，E 的重心（在 E 处放重量为 2 的小球）．

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

于是，我们得出△ABC的三条中线AD，BE，CF交于同一点G，这点是A，B，C的重心，分每条中线为$2:1$.

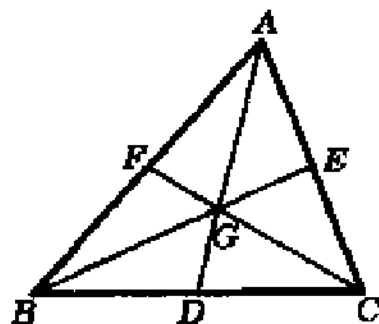


图 33

G也称为△ABC的重心.

在计算线段的比值时，用上述物理方法特别方便. 例如

设D，E分别在△ABC的边BC，AB上，并且

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n},\quad \frac{AE}{EB}=\frac{h}{k}.$$

AD，BE相交于G. 求$\frac{AG}{GD}$.

在A，B，C处分别放上重量kn，hn，hm，则B，C的重心在D；A，B，C的重心在AD上. 同理，A，B，C的重心在CE上. 从而A，B，C的重心就是AD与CE的交点G.

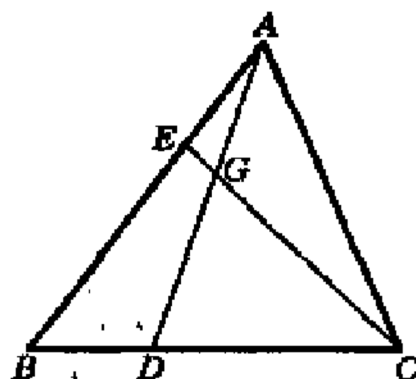


图 34

可在D处放重量$h(m+n)$，去掉B，C的重量. 所以

$$\frac{AG}{GD}=\frac{h(m+n)}{kn}.$$

特别地，当$m=h=1$，$k=n=2$时，

$$\frac{AG}{GD}=\frac{3}{4}.$$

21. 塞瓦定理

如果在△ABC的顶点A，B，C处，分别放有重量p，q，r，那么如何确定这三点的重心？

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

我们在 AC 上取 E，使

$$\frac{CE}{EA}=\frac{p}{r}, \qquad ①$$

E 就是 A，C 两点的重心. 从而 A，B，C 三点的重心应当在直线 BE 上.

再在 AB 上取 F，使

$$\frac{AF}{FB}=\frac{q}{p}, \qquad ②$$

则 F 是 A，B 的重心，A，B，C 的重心应当在直线 CF 上.

因此，A，B，C 的重心是 BE 与 CF 的交点 M.

同样，在 BC 上取 D，使

$$\frac{BD}{DC}=\frac{r}{q}, \qquad ③$$

则 A，B，C 三点的重心 M 也在 AD 上. 因此 AD，BE，CF 三线共点(图 35).

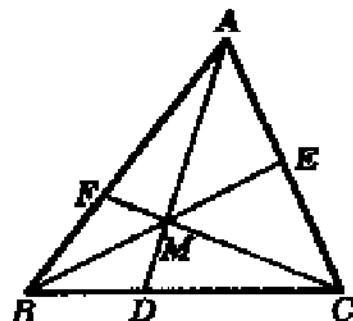


图 35

注意由①，②，③，我们得到

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{p}{r}\cdot\frac{r}{q}\cdot\frac{q}{p}=1. \qquad ④$$

这就导致塞瓦(Ceva)定理：

定理 设点 D，E，F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上，则当且仅当

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1 \qquad ⑤$$

时，AD，BE，CF 三线共点.

这个定理是意大利的水力工程师塞瓦在 1678 年发表的.

当条件⑤满足时，可以设

$$\frac{CE}{EA}=\frac{p}{r}, \quad \frac{AF}{FB}=\frac{q}{p}, \qquad ⑥$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

p,q,r 为正数. 这时由⑤,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{r}{q}. \quad ⑦$$

在 A,B,C 分别放置重量 p,q,r,如上所说三个点的重心 M 就是 AD,BE,CF 的公共点.

反过来,如果三条线交于一点 M,那么仍设⑥式成立,并在 A,B,C 分别放置重量 p,q,r. 如上所说 BE,CF 的交点 M 就是 A,B,C 三点的重心,从而 D 是 B,C 两点的重心,并且⑦成立. 从而由⑥,⑦得出⑤.

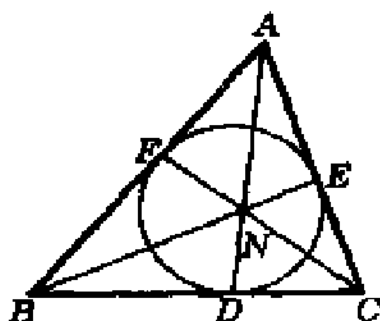


图 36

塞瓦定理在证明三线共点时,有广泛的应用. 例如设内切圆与三边分别相切于 D,E,F(图 36),则 $CE=DC$, $EA=AF$, $FB=BD$,因此⑤式成立,根据塞瓦定理,AD,BE,CF 交于一点 N. 这点称为奈格尔(Nagel)点.

22. 爱因斯坦认为优雅的证明

如图 37,设直线 l 分别与 $\triangle ABC$ 的边(或边的延长线)相交于 D,E,F. 求证:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \quad ①$$

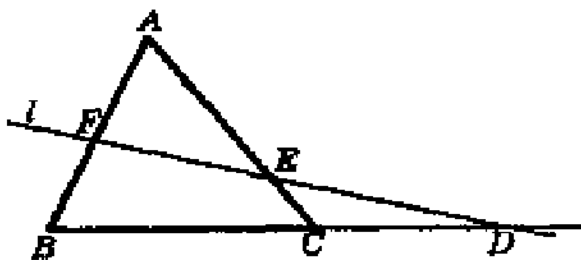


图 37

这个结论称为门奈劳斯(Menelaus)定理.

原来有一个证明是过 A 作 l 的平行线交 BD 于 X,然后再利用比例关系导出①式.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

大科学家爱因斯坦认为这样的证明是“丑陋”的，因为没有过其他两个顶点 B,C 作平行线，破坏了 A,B,C 的平等地位，即数学上的对称性.

爱因斯坦认为下面的证明才是优雅的：由面积

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BFD}}=\frac{AF\cdot EF}{FB\cdot DF}, \quad ②$$

同样

$$\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{BD\cdot DF}{DC\cdot DE}, \quad ③$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{DE\cdot CE}{EA\cdot EF}. \quad ④$$

将②，③，④相乘便得到①.

这一证明的优点是对称(证明中的“同样”或“同理”便体现了这种对称性). 但用到面积以及 l 上的线段 EF,DF 与 DE，稍嫌繁琐. 其实还可以更简单一些：

分别自 A,B,C 向 l 作垂线，设垂线的长为 p,q,r，则

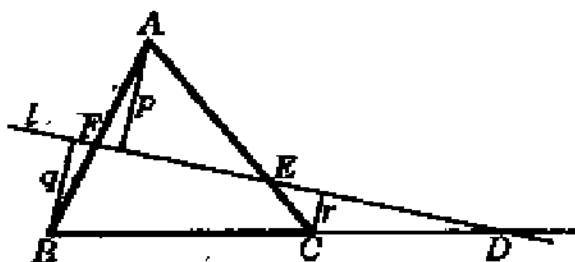


图 38

$$\frac{BD}{DC}=\frac{q}{r},\quad \frac{CE}{EA}=\frac{r}{p},\quad \frac{AF}{FB}=\frac{p}{q}.$$

三式相乘即得①.

这一证明也是对称的，爱因斯坦见到的话，一定会说：“Sehr Gut!”

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

23. 三角形的五心

三角形三条中线交于一点，这点称为重心.

三角形三边的垂直平分线交于一点，这点正好是三角形的外接圆的圆心，简称外心.

三角形的三条高交于一点，这点称为垂心. 要证明三条高交于一点，可以过三角形的每个顶点作对边的平行线，交成一个大三角形. 原三角形的三条高，正好是大三角形三条边的垂直平分线，因而原三角形的三条高交于一点，这点即大三角形的外心(图 39).

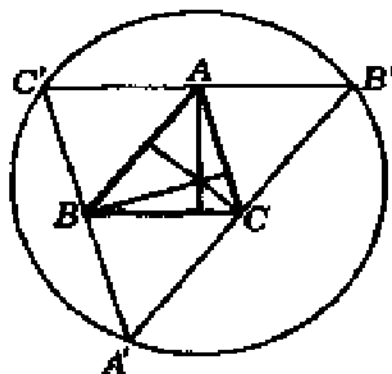


图 39

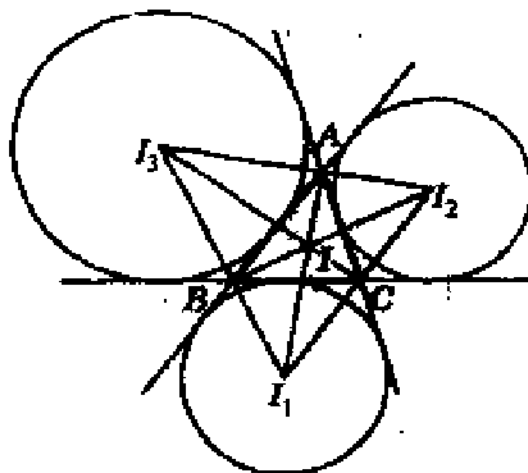


图 40

三角形的三条内角平分线交于一点，这点是内切圆的圆心，简称内心.

三角形一条内角平分线与另两个角的外角平分线交于一点. 以这点为圆心可以作一个圆与三角形的一边及另两边的延长线相切，这个圆称为旁切圆. 旁切圆的圆心简称旁心. 三角形有三个旁心. 以三个旁心为顶点的三角形，其垂心恰好是原三角形的内心.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

旁心也是常常用到的(如第41节). 现行教材删去有关旁心的内容,殊为可惜.

24. 垂心的一个性质

如图41,已知$\odot O$是锐角$\triangle ABC$的外接圆, 高AD的延长线交$\odot O$于F,H是垂心. 证明$HD=DF$.

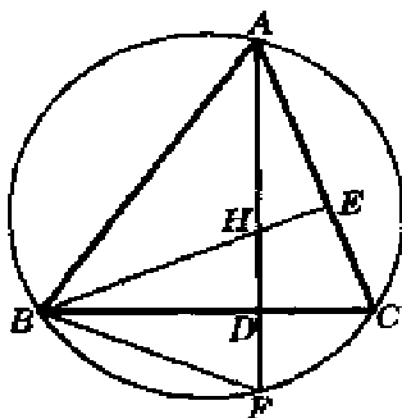


图 41

这道题,我读初中时就曾做过. 后来担任中学教师,教代数(当时代数与几何是分开的). 有个学生问我:

"老师会不会做几何题?"(学生以为教代数的不一定会做几何题,这是很滑稽的想法.)

我说:"试试看."

她就说了上面的题.

其实解法很简单: 设BE是另一条高(当然也过垂心H),连接BF. 只需证明

$$\triangle BDH \cong \triangle BDF. \quad ①$$

已知$\angle BDH=\angle BDF=90°$,$BD=BD$,只需再找一组相等的对应角.

因为$\angle HBD=90°-\angle BHD=90°-\angle AHE=\angle HAE$,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

而$\angle HAE=\angle FBD$，所以

$$\angle HBD=\angle FBD.$$

从而①成立，$HD=DF$.

本题在第 52 节中用到.

25. 逐步推广

我们知道，在$\triangle ABC$中，高AD，BE，CF相交于垂心H. 不难证明$\angle EDH=\angle FDH$.

事实上，图 42 中有许多的四点共圆. 如由$\angle AEB=\angle ADB=90°$可知$D$，$E$都在以$AB$为直径的圆上，从而$\angle ADE=\angle ABE$. 又由$\angle HDB=\angle HFB=90°$可知$D$，$F$都在以$BH$为直径的圆上，从而$\angle ABH=\angle FDH$. 因此

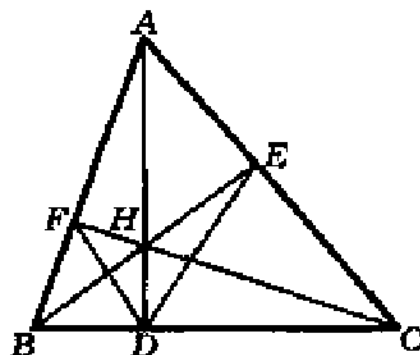


图 42

$$\angle EDH=\angle FDH. \qquad ①$$

(不难看出A，B，C，H正好是$\triangle DEF$的旁心与内心. 可与图 40 比较.)

如果AD仍然是高，但H只是AD上的一点，BH，CH分别交AC，AB于E，F，那么①仍然成立. 证法如下：

过A作BC的平行线，与DE，DF的延长线分别相交于E'，F'(图 43)，易知

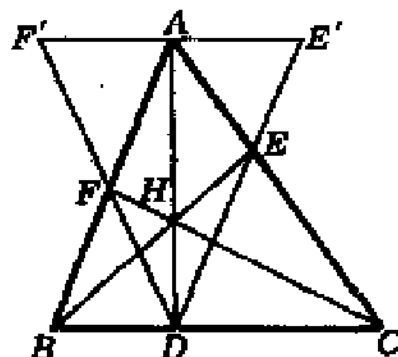


图 43

$$\frac{AE'}{AE}=\frac{CD}{DE}, \quad \frac{AF'}{AF}=\frac{BD}{BF},$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

所以
$$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}.$$
由塞瓦定理，上式的值为 1，所以
$$AE'=AF'.$$
于是$\triangle DE'F'$的高 AD 平分 $E'F'$，从而①成立.

再进一步，设四边形 $ABDC$ 中，AD 平分$\angle BDC$. H 为 AD 上任一点，BH，CH 分别交 AC，AB 于 E，F，则①成立. 这是 1999 年全国高中联赛加试的第二题. 它相当于将图 39 中的线段 BC 变成折线 BDC.

证明基本上是"依葫芦画瓢"：

过 A 分别作 DC，BD 的平行线，分别交 DE，DF 的延长线于 E'，F'（图 44).

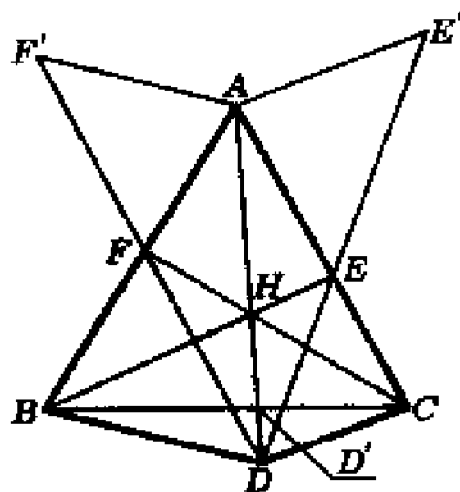


图 44

同样，
$$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}.$$
连接 BC，交 AD 于 D'. 由于 AD 平分$\angle BDC$，所以
$$\frac{CD}{DB}=\frac{CD'}{D'B},$$
代入上式得
$$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD'}{D'B}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}. \qquad ②$$
②式右边依然为 1，从而仍导出 $AE'=AF'$.

因为
$$\angle E'AD=180°-\angle CDA=180°-\angle ADB$$
$$=\angle F'AD,$$
所以$\triangle E'AD\cong\triangle F'AD$，①成立.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

26. 垂心乎？（一）

如图 45，如果 H 是$\triangle ABC$ 的垂心，那么 H 在高 AD 上，而且$\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$.

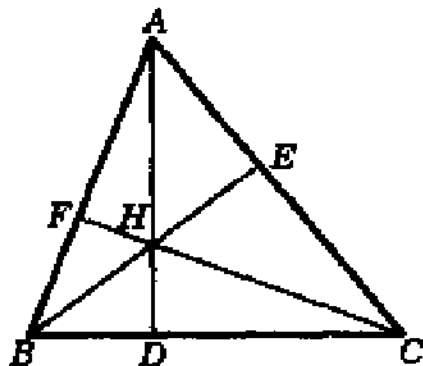


图 45

这个结论，证明不难，根据定义，H 在高 AD 上，H 也在高 BE，CF 上，所以

$$\begin{aligned}\angle BHC &= \angle EHF \\ &= 360^\circ-\angle AEH-\angle AFH-\angle BAC \\ &= 360^\circ-90^\circ-90^\circ-\angle BAC \\ &= 180^\circ-\angle BAC.\end{aligned}$$

反过来，如果点 H 在$\triangle ABC$ 的高 AD 上，并且$\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$，那么 H 一定是$\triangle ABC$ 的垂心吗？

答案是肯定的，即上述条件是“H 是$\triangle ABC$ 的垂心”的充分必要条件.

这个结论证明不算难，但想出来也要费点功夫，读者不妨先试一试. 我们的证法如下：

如图 46，延长 AD 到 A'，使 $DA'=AD$，连接 $A'B$，$A'C$（即作$\triangle ABC$ 关于 BC 的对称图形）.

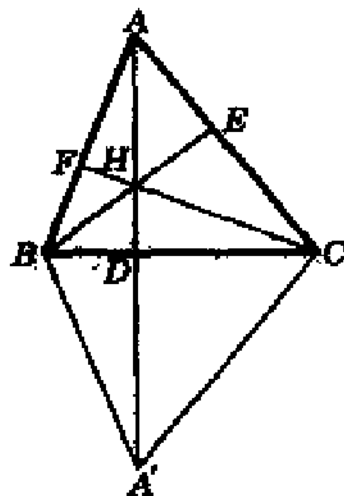


图 46

易知 $\angle BA'D=\angle BAD$，

$\angle BA'C=\angle BAC$.

因 $\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$，

故 $\angle BHC+\angle BA'C$

$=\angle BHC+\angle BAC=180^\circ$，

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

从而 A',B,H,C 四点共圆，

$$\angle BA'D=\angle BCH.$$

于是 $$\angle BAD=\angle BCH,$$

$$\angle BFC=180^\circ-\angle BCH-\angle ABC$$
$$=180^\circ-\angle BAD-\angle ABC=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

即 CF 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

27. 垂心乎？（二）

在锐角三角形 ABC 中，$AB\neq AC$. AD 是高，H 是 AD 上一点，连接 BH 并延长交 AC 于 E，连接 CH 并延长交 AB 于 F，已知 B,C,E,F 四点共圆，问：H 是否一定是 $\triangle ABC$ 的垂心？证明你的结论.

本题是 1998 年教育部高中理科试验班的入学试题，答案是肯定的，即 H 一定是 $\triangle ABC$ 的垂心.

如图 47，为了证明这一点，我们利用对称性（当然也有其他的证法）. 虽然现在高 AD 不是 $\triangle ABC$ 的对称轴，但我们可以将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折过去，也就是在 DC 上取 B'，使 $DB'=DB$.

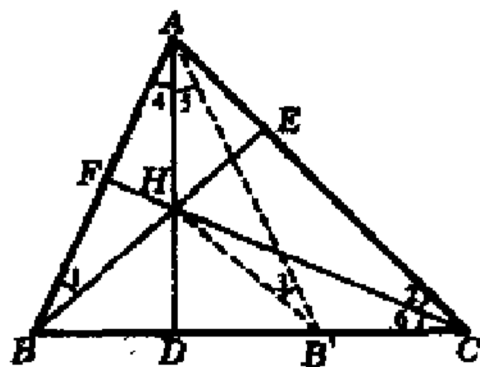


图 47

由对称性，$\angle 3=\angle 1$. 由已知 B,C,E,F 共圆，$\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 3=\angle 2$，B',C,A,H 四点共圆. 从而 $\angle 5=\angle 6$.

又由对称性，$\angle 4=\angle 5$，所以 $\angle 4=\angle 6$，A,F,D,C 四点共圆，从而 $\angle AFC=\angle ADC=90^\circ$，$H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

由于利用了对称性，本题的图形“集中”到右侧，才产生了

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

许多“四点共圆”，所以“将$\triangle ABD$沿AD翻折”是这个解法的关键步骤.

28. 位似、欧拉线

图形可以放大或缩小，最简单的方法就是位似. 如图 48，任取一点O作为位似中心，对任一点A，在射线OA上取一点A'，使

$$OA' : OA=\lambda,$$

λ是一个给定的正实数，A'称为A的像.

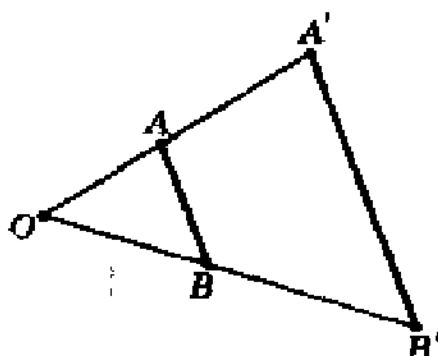


图 48

如果B'是B的像，那么O、B、B'共线，

$$OB' : OB=\lambda,$$

从而$A'B' /\!/ AB$，并且

$$A'B' : AB=\lambda.$$

λ也可以取负值，这时A'在射线OA的反向延长线上.

设$\triangle ABC$的中线为AD、BE、CF，重心为G. 那么，以G为位似中心，取$\lambda=-\frac{1}{2}$时，A、B、C的像分别为D、E、F，从而$\triangle ABC$的像是$\triangle DEF$. $\triangle ABC$的外接圆的像，就是$\triangle DEF$的外接圆. 后者常称为九点圆或欧拉圆.

由于$\triangle ABC$的垂心H的像，应当是$\triangle DEF$的垂心，即O点，所以H、O、G三点共线，并且O在HG的延长线上，

$$OG=\frac{1}{2}GH.$$

这条直线OG，称为欧拉线.

$\triangle ABC$的外心O的像，应当是九点圆的圆心N. N，O，G

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

三点共线，并且 N 在 OG 的延长线上，

$$GN=\frac{1}{2}OG.$$

因此，$ON=OG+GN=\frac{3}{2}OG$，而

$$NH=GH-GN=2OG-\frac{1}{2}OG=\frac{3}{2}OG,$$

所以 N 是 OH 的中点.

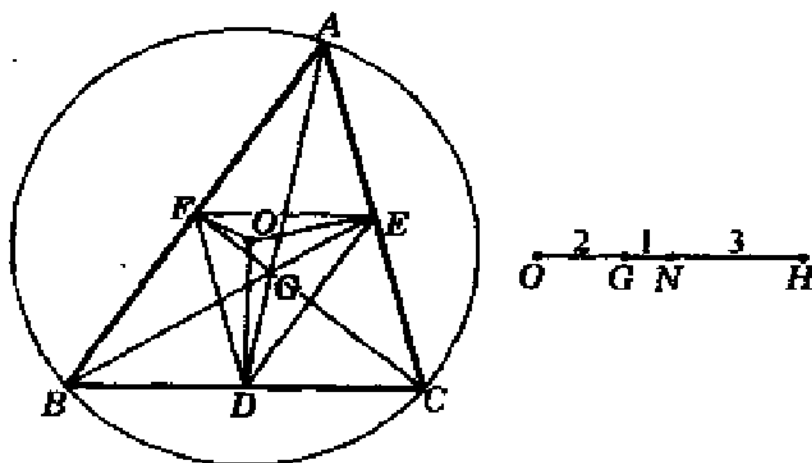


图 49

O,G,N,H 四点位置如图 49 所示，其中

$$OG:GN:NH=2:1:3.$$

九点圆半径正好是外接圆的$\frac{1}{2}$. 在下面第 31 节将要提到

$$R\geqslant 2r,$$

所以九点圆不小于内切圆.

不仅如此，内切圆正好与九点圆内切(当且仅当三角形是正三角形时，$R=2r$，此时九点圆与内切圆重合). 这是德国数学家费尔巴哈(K. W. Feuerbach，1800—1834)在 1822 年的著作中首先提出并证明的. 有兴趣的读者可以看《近代欧氏几何学》(R・A・约翰逊著，单墫译，上海教育出版社 1999 年出版).

顺便说一下，费尔巴哈有一个弟弟(L. A. Feuerbach，

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

1804—1872)，是一位大名鼎鼎的哲学家，对马克思(Karl Marx，1818—1883)有很大的影响.

29. 九 点 圆

顾名思义，九点圆通过九个特殊的点，其中三点是三边的中点，另外六个点，我们将在下面加以说明.

首先，我们知道外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，并且 $OG:GH=DG:GA=1:2$，所以

$$AH=2\times OD. \qquad ①$$

于是取 AH 的中点 A_1(图 50)，便有

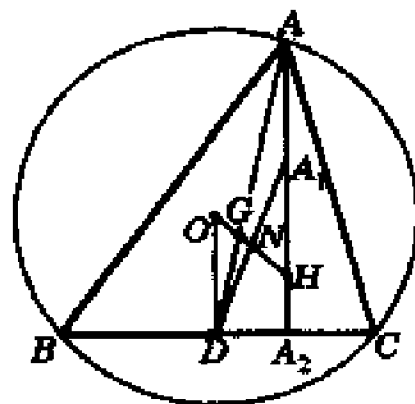


图 50

$$A_1H \underline{\underline{/\!/}} OD,$$

从而四边形 $ODHA_1$ 是平行四边形，OH 与 A_1D 互相平分. 又我们已经知道九点圆的圆心 N 是 OH 中点，所以 N 也是 A_1D 的中点. 从而 A_1 也在以 N 为中心，ND 为半径的九点圆上，并且 A_1D 是九点圆的直径.

设 AA_2 是高，那么$\angle A_1A_2D=90°$，所以 A_2 也在九点圆上.

而此九点圆除通过三边中点外，还通过线段 AH，BH，CH 的中点，通过三条高的垂足，它是名副其实的九点圆.

30. 西 摩 松 线

如图 51，设$\triangle ABC$ 的外接圆为$\odot O$，从圆上任一点 P 到

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

三边作垂线，垂足分别为 D,E,F，则 D,E,F 三点共线.

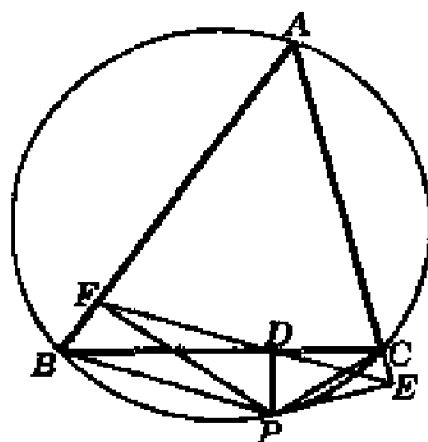


图 51

证明不难，因为有很多的四点共圆可以利用. 例如 B,P,D,F 四点共圆，P,D,C,E 四点共圆，当然还有 A,B,P,C 四点共圆.

于是

$$\angle PDE=\angle PCE=\angle ABP=180^\circ-\angle PDF,$$

即 $\angle PDE+\angle PDF=180^\circ$，所以 D,E,F 三点共线.

这条直线通常称为西摩松(Simson)线. 实际上它与西摩松毫无关系，而是 1797 年由华莱士(W. Wallace)首先发现的. 张冠李戴不仅出现在中国，外国这样的例子更多.

上述西摩松定理的逆命题也是成立的：

如果点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的垂线的垂足共线，那么 P 必在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明与上面大同小异，mutatis mutandis.

31. 欧 拉 公 式

欧拉(Euler，1707—1783)是 18 世纪的科学巨人，他的全集长达 45 册，仅目录就有 51 页，被人们誉为"大家的导师".

欧拉对平面几何的贡献很多：欧拉线、欧拉圆、欧拉公式、欧拉定理.

这一节，我们就——按照拉普拉斯的说法——"读读欧拉"，专门说一下欧拉公式.

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，外接圆半径为 R，内切

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

圆半径为 r，又记外心、内心的距离 OI 为 d，则有

$$d^2=R^2-2Rr. \quad ①$$

①称为欧拉公式.

为了证明①，我们先将它改成

$$R^2-d^2=2Rr. \quad ②$$

②式左边是点 I 对于⊙O 的幂：过圆内任一点 P 的弦被 P 分成两个部分，这两部分的乘积是一个定值，称为 P 关于⊙O 的幂. 事实上，如果将 OI 延长交圆于 E，F，那么

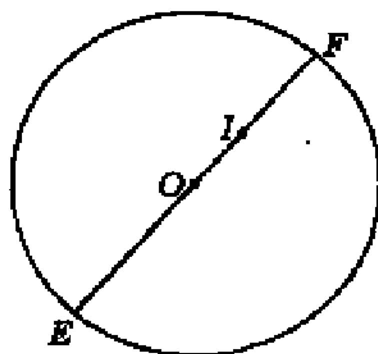


图 52

$$\begin{aligned}R^2-d^2&=(R+d)(R-d)\\&=(EO+OI)(OF-OI)\\&=EI\times IF.\end{aligned}$$

因此，设 AI 交⊙O 于 M，则

$$R^2-d^2=MI\times IA. \quad ③$$

（③也可以直接证明：设 AM 的中点为 N，则 $R^2-d^2=MN^2-NI^2=(MN+NI)(MN-NI)=MI\times IA$.）

因此，只需证明

$$2Rr=MI\times IA, \quad ④$$

或写成比例式

$$\frac{2R}{MI}=\frac{IA}{r}. \quad ⑤$$

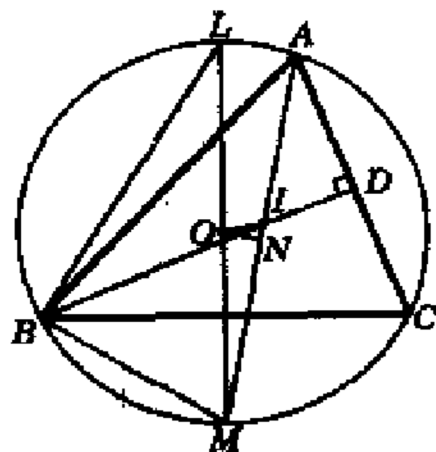


图 53

为了证明⑤，应当寻找两个相似的三角形. 一个以长 IA，r 为边；另一个以长 $2R$，MI 为边. 前一个不难找，图 53 中的△IDA 就是，D 是内切圆与 AC 的切点. 后一个也必须是直角三角形，所以一边是直径

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

ML,另一个顶点也应当在圆上. $\triangle MBL$ 就满足要求.

容易证明

$$MB=MI$$

$\left(利用\triangle MBI=\angle MIB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)\right)$,

$$\angle MLB=\angle NAD=\frac{1}{2}\angle BAC$$

(M 是$\overset{\frown}{BC}$的中点).

因此⑤成立,从而①成立.

因为 $d^2\geqslant 0$,所以由欧拉公式得出一个副产品,即

$$R\geqslant 2r.$$

这在第 28 节中也曾说过.

32. 拿破仑定理

据说法国皇帝拿破仑一世(Napoléon I, 1769—1821)发现了下面的定理:

以任一三角形 ABC 的边为边向外作正三角形,三个正三角形的中心 O_1,O_2,O_3 组成一个正三角形(图 54).

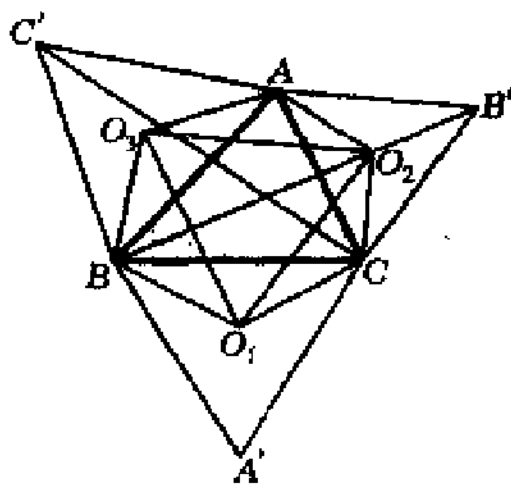


图 54

这个定理有许多种证明. 这里介绍一种(采用"运动"的说法):

将$\triangle C'AC$ 绕 A 旋转 60°,则 AC' 与 AB 重合,AC 与 AB' 重合,因此 $C'C=B'B$.

将$\triangle O_3AO_2$ 绕 A 旋转 30°,然后按比例$\frac{\sqrt{3}}{3}:1$ 放大,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

则 O_3 与 C' 重合，O_2 与 C 重合. 因此

$$O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{3}C'C=\frac{\sqrt{3}}{3}B'B.$$

同理可得

$$O_3O_1=O_1O_2=\frac{\sqrt{3}}{3}C'C.$$

所以 $\triangle O_1O_2O_3$ 是正三角形.

这个定理有各种等价的说法，例如：

以任意三角形 ABC 的边为底向外作底角为 30° 的等腰三角形，则三个等腰三角形的顶点 O_1，O_2，O_3 组成正 $\triangle O_1O_2O_3$.

这个定理还有各种变形，比如：$\triangle ABC$ 退化为线段 BC，A 为 BC 中一点；将向外作改为向内作等等.

这个定理还可以加以推广. 首先考虑四边形 $ABCD$，以它的各边为边向外各作一个正方形，连接四个正方形的中心 O_1，O_2，O_3，O_4. 四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 不是正方形，但是 $O_1O_3=O_2O_4$，并且 $O_1O_3\perp O_2O_4$. 如果取四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 各边的中点，再把它们连接起来，将到的恰好是一个正方形(为什么？请读者自己证). 这样看来，对于四边形需作两次：首先以各边为底向外作顶角为 $\frac{360°}{4}$ 的等腰三角形，连接各个顶点，得一四边形. 再以这个四边形的各边为底向外作顶角为 $\frac{360°}{4}\times 2$ 的等腰三角形(实际上就是取各边中点)，连接各个顶点，得到的一定是正方形.

推而广之，对于 n 边形需照此作 $(n-2)$ 次，各次所作等腰三角形的顶角为

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{360^\circ}{n},\ \frac{360^\circ}{n}\times 2,\ \frac{360^\circ}{n}\times 3,\ \cdots,\ \frac{360^\circ}{n}\times(n-2).$$

这个定理称为道格拉斯-纽曼定理，证明可见《复数计算与几何证题》(常庚哲著，上海教育出版社出版).

有趣的是，上面的作图顺序可以交换. 例如对四边形，可以先取各边中点得一平行四边形，再以这平行四边形各边为底边向外作等腰直角三角形，则这个等腰三角形的顶点组成正方形. 这个事实是不难证明的.

33. 蝴 蝶 定 理

如图 55，在⊙O 中，设 P 为弦 EF 的中点. 过 P 再作两条弦 AC，BD. 连接 BC，AD，分别与弦 EF 相交于 Q，R，则 $RP=PQ$.

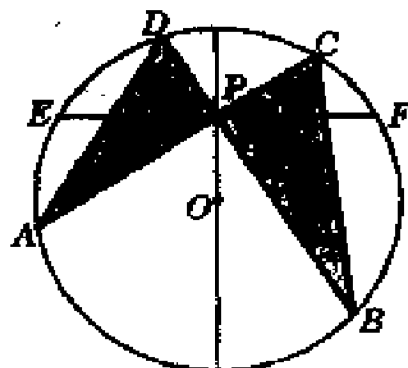


图 55

图形像一只翩翩起舞的蝴蝶，因此，上述结论也就称为"蝴蝶定理".

蝴蝶定理的证法很多，但都不太容易. 我们还是利用"对称"来证.

直线 OP 是⊙O 与弦 EF 的对称轴. 设 A 关于 OP 的对称点为 A'. A' 当然也在⊙O 上，而 R 的对称点应当是 Q，所以应有

$$\angle PA'Q=\angle PAR=\angle PBC, \qquad ①$$

从而 A'，Q，P，B 应当四点共圆(图 56).

但 R 的对称点是 Q，正是要证明的，不能用它作为根据推出①及有关的四点共圆；相反地，我们要由四点共圆导出①，从而 R 的对称点是 Q. 不过，R 的对称点应当是 Q，启发我们去证 A'，Q，P，B 共圆. 这点启发是很有用的.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

要证四点共圆，当然要用角的关系，①是要证的，不能用. 能用哪两个角呢？

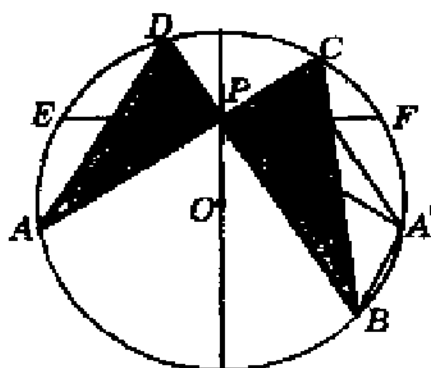


图 56

注意由 A' 与 A 的**对称性**，

$$\angle A'PF=\angle APE,$$

而 $\angle A'BC$ 正好是 $\widehat{A'C}$ 的度数的一半，

$$\widehat{A'C}=\widehat{A'F}+\widehat{FC}=\widehat{AE}+\widehat{FC},$$

所以
$$\angle A'BC=\angle A'PF.$$

从而 A'，B，P，Q 四点共圆，①成立，Q 是 R 关于 OP 的对称点.

蝴蝶定理有各种变形和推广，一种最常见的变形如下：

设 P 为⊙O 外一点，过 P 作割线 AC、BD. 又过 P 作 OP 的垂线，这垂线分别与直线 AD、BC 相交于 R，Q，则 $RP=PQ$（图 57）.

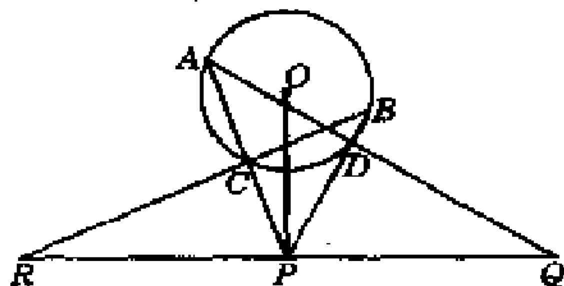


图 57

证法与上面基本相同（垂线相当于弦 EF）.

蝴蝶定理的一般情况可以叙述如下：

如果直线 l 与二次曲线 C_1 相交于 A_1，A_2，与二次曲线 C_2 相交于 B_1，B_2，那么对于由 C_1，C_2 所形成的二次曲线束中的任一条二次曲线，设它与 l 的交点为 D_1，D_2，则

$$\frac{D_1A_1\cdot D_1A_2}{D_1B_1\cdot D_1B_2}=\frac{D_2A_1\cdot D_2A_2}{D_2B_1\cdot D_2B_2}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

34. 平方差与根轴

本讲介绍两种轨迹.

设 O_1,O_2 为定点. 动点 P 到 O_1,O_2 的距离的平方差

$$PO_1^2-PO_2^2=\text{定值 }a,$$

求 P 的轨迹.

线段的平方,启示我们利用勾股定理.

连接 O_1O_2,设 P 向 O_1O_2 所作垂线的垂足为 Q(图 58),则由勾股定理,

$$QO_1^2-QO_2^2=PO_1^2-PO_2^2=a.$$

设 O_1O_2 的中点为 C,则

$$\begin{aligned}&QO_1^2-QO_2^2\\&=(QO_1+QO_2)(QO_1-QO_2)\\&=O_1O_2\times 2CQ,\end{aligned}$$

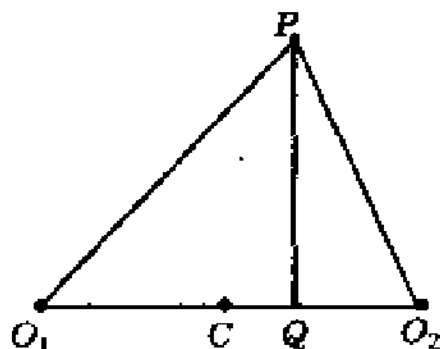


图 58

从而

$$CQ=\frac{a}{2\times O_1O_2} \qquad ①$$

为定值. C 为定点,所以 Q 也为定点. P 在过 Q 并且与 O_1O_2 垂直的直线上.

反之,如果 P 在所说垂线上,那么

$$PO_1^2-PO_2^2=QO_1^2-QO_2^2,$$

而且 $$QO_1^2-QO_2^2=O_1O_2\times 2CQ=a.$$

因此 P 点的轨迹就是所说的垂线.

对于一个圆,过 P 作直线交圆于 A,B,则 $PA\cdot PB$ 称为 P 关于这个圆的幂(图 59).

熟知这个幂与所作直线的位置无关,而且设⊙O 的半径

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

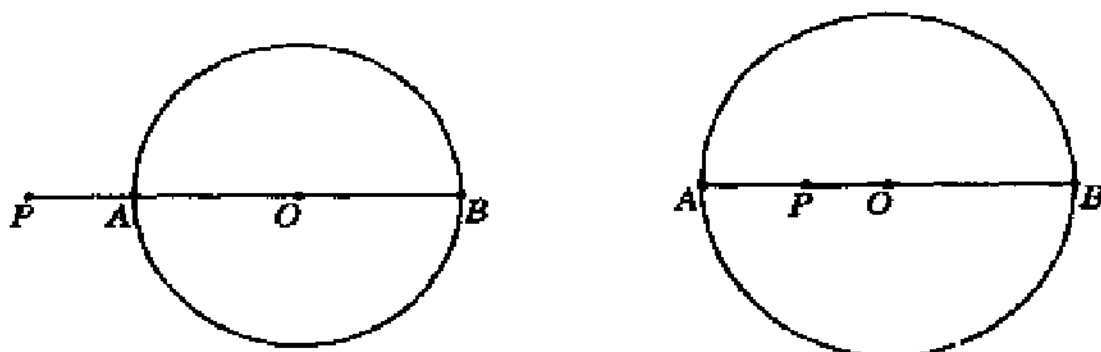


图 59

为 R，则不论 P 在圆内或圆外，所说的幂

$$PA\times PB=(PO-AO)\times(PO+OB)=PO^2-R^2$$

（P 在圆外时，幂为正；P 在圆内时，幂为负．如果你不喜欢将线段与正负联系，可以取 PO^2-R^2 的绝对值作为幂）．

已知定圆⊙O_1，⊙O_2，动点 P 到这两个圆的幂相等，求 P 的轨迹．

设这两个圆的半径分别为 r_1，r_2，则有

$$PO_1^2-PO_2^2=r_1^2-r_2^2,$$

因此 P 的轨迹是一条垂直于连心线 O_1O_2 的直线．这条直线称为根轴．

当⊙O_1，⊙O_2 相切时，根轴就是过切点的公切线．

当⊙O_1，⊙O_2 相交时，根轴就是公共弦所在的直线．

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（四）请来看小花

35. 完全不用三角

思维有各种方式.算术的、代数的、几何的、三角的、……各有千秋，不能说这一种比那一种好，或者某一种比另一种差，正如小花，我们应当欣赏，而不必多加褒贬.

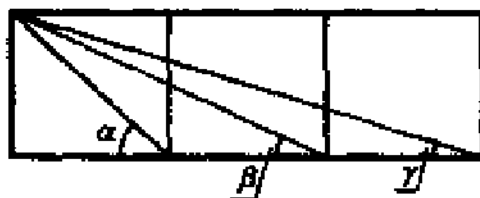


图 60

如图 60，三个正方形排在一起.证明

$$\alpha+\beta+\gamma=90°.$$

本题用三角可以证明.完全不用三角，怎么证？

显然 $\alpha=45°$，所以只需证明

$$\beta+\gamma=45°.$$

为此我们再作三个正方形，使 β 与 γ 可以"拼"在一起.

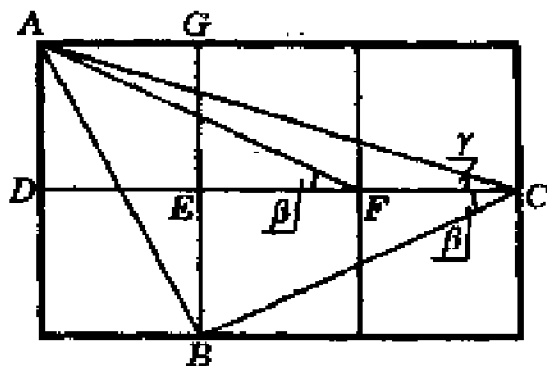


图 61

容易看出 $\angle BCE=\angle AFD=\beta=\angle ABG$，所以

$$\angle ABC=\beta+\angle EBC=90°.$$

又易知 $AB=BC$，所以$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，即

$$\angle ACB=45°,$$

$$\beta+\gamma=45°.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

36. 掩 卷 一 思

悬念，电影、电视中常用的手法，其实"古已有之".中国的章回小说家，写到紧要关头，或者"欲知后事如何，且听下回分解"，或者故弄狡狯，请君"掩卷一思".

这"掩卷一思"正是学习数学的一个好方法.遇到问题，不宜急着看解答，先想一想：

"怎样去解？"，"结果如何？"

然后对照下文，是"彼此暗合"，"所见略同"，还是"见仁见智"，"各有千秋".

坚持"一思"，学力必有长足的进步.

下面的一道问题，请您看完题目后掩卷一思.

已知四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD 与 DA 分别等于四边形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$ 与 $D'A'$，并且 $AB\parallel CD$，$B'C'\parallel D'A'$.证明这两个四边形都是平行四边形.

不知读者是否遇到困难，笔者在解这道题时，确确实实走了些弯路，然后才发现问题是一个几何不等式，用到的知识极为基本，起关键作用的是三角形的两边之和大于第三条边.

我们只需证明 $AB=CD$.如果结论不成立，不妨设 $AB>CD$，$BC>DA$.

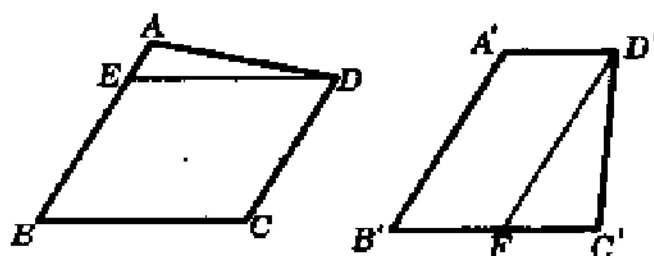


图 62

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

如图 62，在线段 AB 上取 E 使 $BE=CD$，则四边形 $EBCD$ 是平行四边形，所以 $ED=BC'$.

同样，在线段 $B'C'$ 上取 F 使 $B'F=A'D'$，则有 $D'F=A'B'$.

于是

$$AB-CD=AE>ED-AD=BC-AD=B'C'-A'D'$$
$$=FC'>D'F-C'D'=A'B'-C'D'=AB-CD.$$

矛盾！

37. 意料之外

在正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 上分别取点 M，N，使得 $CM+CN=AB$. AM，AN 将对角线 BD 分为三条线段，证明这三条线段一定能组成三角形，而且这三角形有一个角为 $60°$.

这道题似乎需要相当复杂的计算. 然而，有一个优雅的解答完全不用计算，这是非常出人意料的事.

考虑以正方形 $ABCD$ 为底的正方体 $A_1B_1C_1D_1—ABCD$. 在 A_1B_1 上取 N_1，在 A_1D_1 上取 M_1，使 $A_1N_1=CM$，$A_1M_1=CN$. AN_1 与 A_1B 相交于 Q_1，AM_1 与 A_1D 相交于 P_1（图 64）.

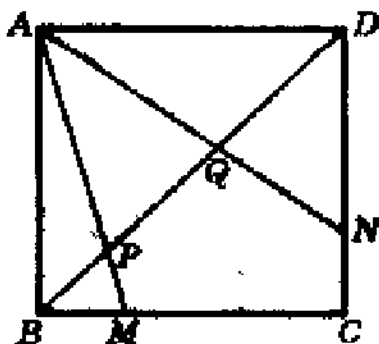


图 63

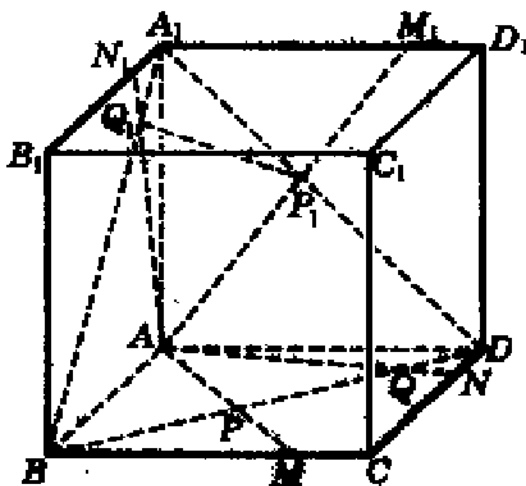


图 64

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

由于 $A_1D=DB=A_1B$，所以 $\angle DA_1B=60°$. 我们只需证明 $\triangle A_1P_1Q_1$ 的三条边恰好等于 BD 上的三条线段.

易知 $M_1N_1=MN$. 又 $A_1M_1=CN=BC-CM=BM$，所以 $AM_1=AM$. 同理 $AN_1=AN$. 于是 $\triangle AM_1N_1\cong\triangle AMN$，$\angle M_1AN_1=\angle MAN$. 易知 $AP_1=AP$，$AQ_1=AQ$，从而由 $\triangle P_1AQ_1\cong\triangle PAQ$ 得 $P_1Q_1=PQ$.

又由 $A_1M_1=BM$ 及正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 $BADC$ 全等，立即得出 $A_1P_1=BP$. 同理 $A_1Q_1=DQ$. 证毕.

38. 平行四边形

设⊙O 的弦 AC，BD 相交于 K，而 M，N 分别是 $\triangle AKB$，$\triangle CKD$ 的外心. 求证：

$$OM=KN. \qquad ①$$

先来画图，⊙O 及弦 AC，BD 均不难画. K 点亦立即定出. 但 M，N 比较难作. M 在弦 AB 的垂直平分线上. 而过 O 作 AB 的垂线，这垂线必平分 AB，所以 M 在这条垂线上. 同理 N 在 CD 的、过 O 的垂线上(图 65).

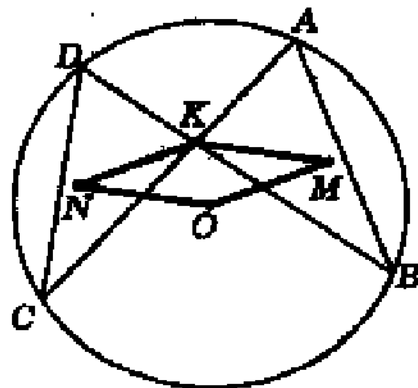


图 65

如果①成立，那么根据同样理由应有

$$ON=KM. \qquad ②$$

①，②表明四边形 $OMKN$ 是平行四边形. 所以过 K 分别作直线与上述两条垂线平行，得出的交点就是 M，N.

因为平行四边形的对边相等，所以只要证明确实有

$$NK /\!/ OM，MK /\!/ ON， \qquad ③$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

①就成立了.为此只要证

$$NK \perp AB, \quad MK \perp CD. \qquad ④$$

注意对一个三角形,例如 $\triangle KCD$,外心 N 与顶点的连线 NK 与边 KC 所成的角为

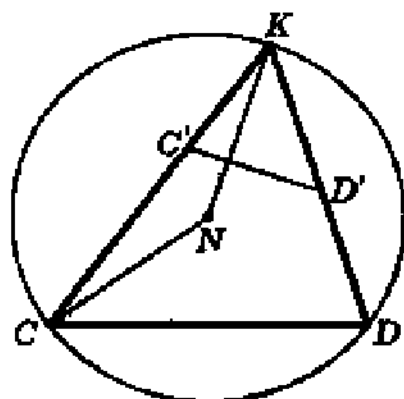


图 66

$$\angle NKC = \frac{1}{2}(180° - \angle CNK)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - 2\angle D)$$

$$= 90° - \angle D.$$

如果 $C'D'$ 与 CD 关于 KC,KD 逆平行(即 C',C,D,D' 四点共圆),那么

$$\angle C' + \angle NKC' = \angle D + \angle NKC' = 90°.$$

即 NK 与 CD 的(关于 KC,KD 的)逆平行线垂直.而 AB 正是 CD 关于 KC,KD 的逆平行线,所以

$$NK \perp AB.$$

(不用逆平行线的说法,由

$$\angle A + \angle NKC = \angle D + \angle NKC = 90°$$

亦可直接得出.)

同理 $MK \perp CD$.于是①成立.

39. 边 界 形 状

质点在第一象限及正 x,y 轴上运动.在 x 轴上的速度为每秒 2 个单位长,在其他各点的速度均为每秒 1 个单位长.质点从原点出发,运动 1 秒钟,求它所能达到的区域的边界是什么?

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

这原是一道物理竞赛题.后来被用作上海十所重点中学联合考试的试题.

先来探索一下边界的形状.

沿 x 轴可走到 $A(2,0)$.这点当然是边界上的点.

以原点 O 为圆心,1 为半径在第一象限圆 $\frac{1}{4}$ 圆.圆周上的点,都是质点可以达到的.但却不一定是边界上的点,因为质点可能达到更远的地方.

质点可以在 x 轴上行 t 秒($0\leqslant t\leqslant 1$),然后沿一条在第一象限的射线运动($1-t$)秒.即先行到 $B_t(2t,0)$,然后行到以 B_t 为圆心,$1-t$ 为半径的圆(在第一象限的部分)上.

于是,我们可以作出这些圆(在第一象限的部分).它们的圆心 $B_t(2t,0)$在 x 轴上,半径为 $1-t$,而 $0\leqslant t\leqslant 1$(当 $t=0$ 时,即以原点为圆心的圆;当 $t=1$ 时,即一个点 A).

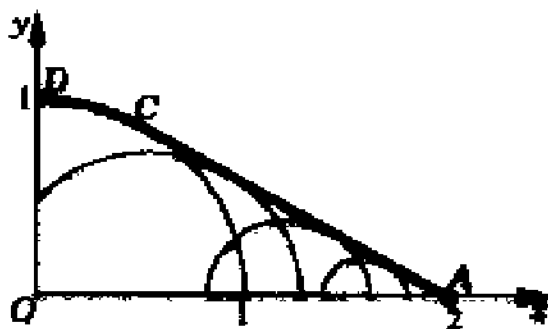


图 67

从所作的圆(图 67)可以看出所说的边界由一条圆弧与一条线段组成.

圆弧在以 O 为圆心,1 为半径的圆上,从 $D(0,1)$ 到点 C,所含度数为 $30°$,即 $\angle DOC=30°$.而线段 AC 与以上所作的圆都相切(在微分几何中,称 AC 为这族圆的包络).

下面证明这的确是所求的边界.

显然 $\overset{\frown}{DC}$ 上的每一点,质点都能到达.设 E 为 AC 上一点,过 E 作 AC 的垂线,交 x 轴于 B(图 68).

设 $OB=2t$,则 $BA=2-2t$,而 $\angle BAE=30°$,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$BE=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}(2-2t)=1-t.$$

因此质点从 O 沿 x 轴行 t 秒到 B，再沿 BE 行 $1-t$ 秒便达到 E. 从而 AC 上每一点，质点均能到达.

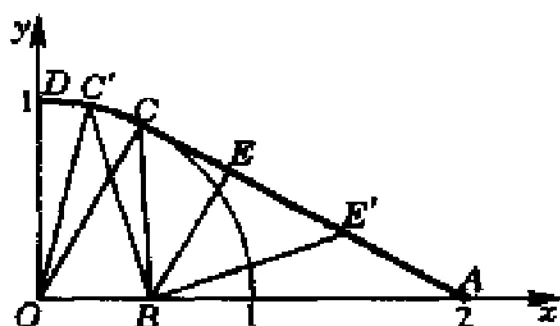


图 68

稍困难一点的是证明质点不能"溢出"上述边界.

仍用图 68. 质点沿 x 轴到 B 后，如果沿直线 BE' 前进. 设 BE' 交 AC 于 E'. 那么由于斜线大于垂线，

$$BE'>BE=1-t.$$

所以质点不能沿 BE' 溢出上述边界.

如果质点到 B 后，沿直线 BC' 前进. 设 BC' 交 $\overset{\frown}{DC}$ 于 C'，那么在 $\triangle C'OB$ 与 $\triangle COB$ 中，

$$C'O=CO=1,\ OB=OB,\ \angle C'OB>\angle COB,$$

所以

$$BC'>BC>BE=1-t,$$

因而质点也不会沿 BC' 溢出上述边界.

综上所述，$\overset{\frown}{DC}$ 与线段 CA 组成所求的边界.

40. 求角的值(一)

求角的值，也是常见的问题.

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$AB=BC$，$\angle ABC=80°$，$\angle PAC=40°$，$\angle ACP=30°$，求 $\angle BPC$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

本题的解并不容易.用三角当然可做,但我们更希望纯粹几何的解法(三角解法见本节后半部分).而纯用几何,没有正确的想法,将会陷于窘境,达不到目的,做了半天,"犹隔蓬山一万重".

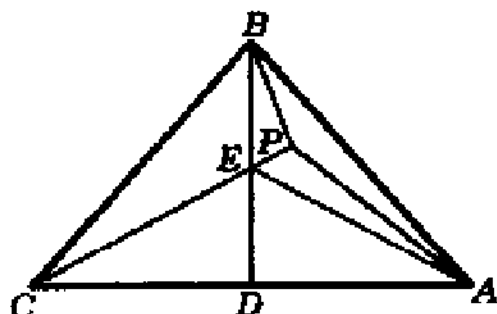


图 69

首先应画一个正确的图.由于 $BA=BC$,这个三角形是以 AC 为底的等腰三角形,所以 B 应画在中间.

这样的图启发我们利用对称性.先作出对称轴,也就是高 BD.设 BD 交 CP 于 E,连接 AE(图 69).

注意$\triangle ABE$.显然

$$\angle PEA=\angle ECA+\angle EAC=2\times30°=60°,$$
$$\angle PEB=\angle CED=60°,$$

所以 PE 平分$\angle AEB$.

又

$$\angle PAE=\angle PAC-\angle EAC=40°-30°=10°,$$
$$\angle PAB=\angle CAB-\angle PAC=\frac{180°-80°}{2}-40°=10°,$$

所以 PA 平分$\angle EAB$.

因此 P 是$\triangle ABE$ 的内心(这是本题的关键),

$$\angle PBE=\frac{1}{2}\angle EBA=\frac{1}{2}\times40°=20°,$$

从而

$$\angle BPC=180°-\angle PEB-\angle PBE$$
$$=180°-60°-20°=100°.$$

不用对称性,当然也可以做,但不如上法简单.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

三角的解法思路直接，但稍繁，优美性不及上面的几何解法．我们将它附在下面：

设$\angle BPC=\alpha$，则

$$\angle BPA=360^\circ-\alpha-\angle CPA=250^\circ-\alpha,$$

由正弦定理

$$\frac{BC}{BP}=\frac{\sin\alpha}{\sin 20^\circ},\quad \frac{BA}{BP}=\frac{\sin(250^\circ-\alpha)}{\sin 10^\circ},$$

所以

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin(250^\circ-\alpha)}{\sin 10^\circ}, \qquad ①$$

即

$$\frac{\sin(\alpha-70^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}, \qquad ②$$

从而

$$2\cos 10^\circ\sin(\alpha-70^\circ)=\sin\alpha. \qquad ③$$

由积化和差得

$$\sin(\alpha-60^\circ)+\sin(\alpha-80^\circ)=\sin\alpha, \qquad ④$$

移项（注意使下一步产生特殊角 30°的正弦）

$$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin\alpha-\sin(\alpha-60^\circ),$$

由和差化积得

$$\sin(\alpha-80^\circ)=2\sin 30^\circ\cos(\alpha-30^\circ)=\cos(\alpha-30^\circ),$$

即

$$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin(120^\circ-\alpha).$$

从而

$$\alpha-80^\circ=120^\circ-\alpha,$$

$$\alpha=100^\circ.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

如果注意到 $\alpha=100°$ 是②的解，便可以由

$$\frac{\sin(\alpha-70°)}{\sin\alpha}=\cos70°-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin70°$$

是严格增函数(因为 $-\cot\alpha$ 严格增)立即得出 $\alpha=100°$ 是唯一解，不必再经过③，④等等去求解.

41. 求角的值(二)

$\triangle ABC$ 的角平分线 AB，BE 分别交 BC，CA 于 D，E、DE 平分 $\angle ADC$，求 $\angle A$.

本题的图，如果不知道结论，当然不易画得准确. 不过，可以先画一个草图帮助思考.

题目不算难，但我曾经在不少场合给不同的对象(教师、大学生、中学生)做过. 能够找到最简单的解答的人并不多.

仔细观察你的图，从各个角度去看. 特别是看一看 $\triangle ABD$(而不是原来的 $\triangle ABC$). 那么就会发现 $\triangle ABD$ 的一条内角平分线 BE 与一条外角平分线 DE 相交于 E. 所以 E 是这个三角形的旁心. 从而 AC 平分 $\angle FAD$. 但 AD 又平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAD$ 是平角的 $\frac{1}{3}$，$\angle BAC$ 是平角的 $\frac{2}{3}$，即 $120°$(图 70).

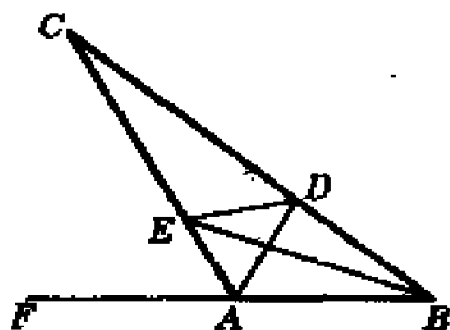


图 70

本题的关键只有一句话：E 是 $\triangle ABD$ 的旁心. 在(一)中，我们曾用到三角形的内心，现在利用旁心，可谓"异曲同工".

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

42. 求角的值（三）

在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=80^\circ$，P点在$\triangle ABC$内，并且$\angle PAC=10^\circ$，$\angle PCB=20^\circ$，求$\angle ABP$.

本题原是北京大学出版的《数学奥林匹克》初中版初二分册的一个习题. 书上答案是70°，但如何推出却不得而知. 1998年在四川彭州讲课，有位听课的老师问我怎样解. 这套书虽然是我主编的，但这一册并不是我写的，即使是我写的，也不能保证每道题都能当场解出来，幸而这题与第40节相当类似，画同样的$\triangle ABC$，并作对称轴，很快就解出来了. 谁知这次写书时却竟然忘记原来的解法，想了好一阵才得到一种解法，但它肯定不是原来的. 我先将这次得到的解法写在下面：

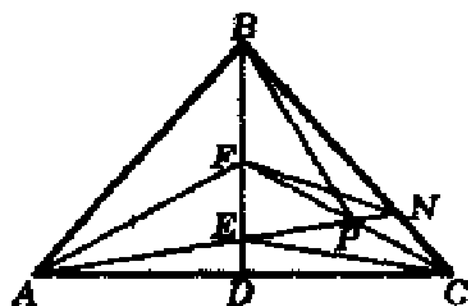


图 71

设AP交BD于E，交BC于N，CP交BD于F. 连接AF（图71）.

易知$\angle FAN=30^\circ-10^\circ=20^\circ=\angle FCN$，所以$F,A,C,N$四点共圆；$\angle CFN=\angle CAP=10^\circ$.

又$\angle CFD=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，$\angle ANB=50^\circ+10^\circ=60^\circ$，所以$P,F,B,N$四点共圆，$\angle PBC=\angle CFN=10^\circ$.

从而$\angle ABP=80^\circ-10^\circ=70^\circ$.

上面的解法用了两次四点共圆，显然不是我原来的解法. 原来的解法更简单些，但实在想不起来，幸而找到当年的日记，竟然有记录（应当养成习惯，将有趣的问题与解答都记录下来，否则事过境迁，再也想不起来）. 原来的解法如下：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

辅助线如图 72，则

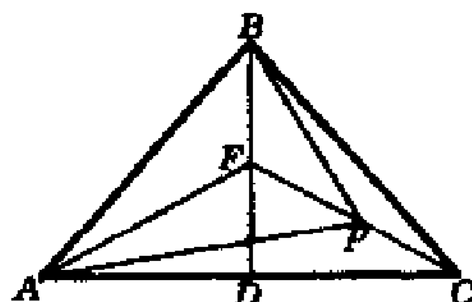


图 72

$\angle FPA=\angle PCA+\angle PAC$

$=10^\circ+(50^\circ-20^\circ)$

$=40^\circ=\angle FBA$，

$\angle FAP=\angle FAC-\angle PAC$

$=\angle PCA-\angle PAC$

$=(50^\circ-20^\circ)-10^\circ=20^\circ$，

$\angle FAB=50^\circ-10^\circ-20^\circ=20^\circ=\angle FAP$，

所以$\triangle FAP\cong\triangle FAB$，$FP=FB$. 从而$\angle FBP=\angle FPB=20^\circ+\angle PBC$. 结合$\angle FBP+\angle PBC=40^\circ$，即得$\angle FBP=30^\circ$，从而$\angle ABP=70^\circ$.

两次的解答不同（人的思维的确难以捉摸），前一个图多出点 N（与点 E），引向另一条路了.

43. 求角的值（四）

求图 73 中的？是多少度.

这道题，可以用三角解，但我们更希望不用三角的解法.

注意$\triangle ABC$是等腰三角形（$\angle ABC=\angle ACB$），所以我们作高 AE（对称轴）.

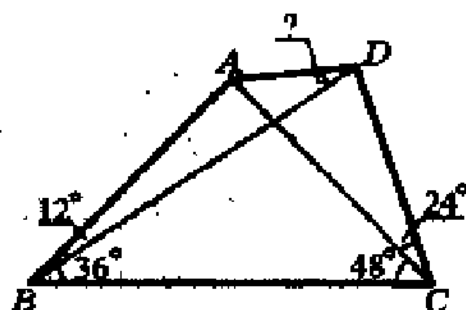


图 73

接下去怎么办呢？

将$\triangle ABE$以 AB 为对称轴翻转得$\triangle ABE'$（图 74）.

$$BE'=BE=\frac{1}{2}BC.$$

注意$\triangle BCD$也是等腰三角形（$\angle BCD=\angle BDC$），所以

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$BE'=\frac{1}{2}BD.$$

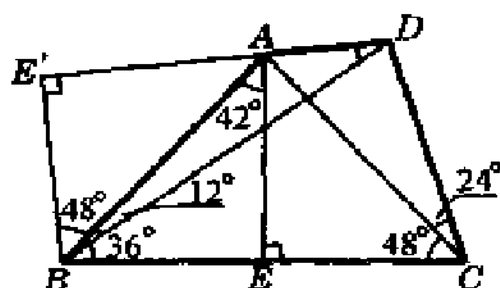


图 74

我们希望 D,A,E' 三点共线，这样就立即得出 $\angle ADB=30°$. 但 D,A,E' 共线必须证明，不能直接利用(虽然它们的确共线).

为了绕过这一障碍，我们自 D 向 BE' 作垂线，设垂足为 E''. 注意

$$\angle DBE''=48°+12°=60°,$$

所以

$$BE''=\frac{1}{2}BD=BE',$$

从而 E'' 与 E' 重合. D 在过 E' 的 BE' 的垂线 $E'A$ 上，即 D,A,E' 三点共线.

三角证法如下：

设 $BC=1$，则 $AB=\frac{1}{2\cos48°}$.

设所求的角为 α，则在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理

$$\frac{1}{2\cos48°}=\frac{\sin\alpha}{\sin(180°-12°-\alpha)},\qquad ①$$

从而

$$2\cos48°\sin\alpha=\sin(168°-\alpha).$$

积化和差得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+48°)&=\sin(168°-\alpha)-\sin(\alpha-48°)\\&=2\cos60°\sin(108°-\alpha)\\&=\sin(108°-\alpha),\end{aligned}$$

于是

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\alpha+48°=108°-\alpha,$$
$$\alpha=30°.$$

上面将 $\sin(\alpha-48°)$ 移项是为了得出特殊角的三角函数值 $\cos 60°$.

也可由①的右边是 α 的严格递增函数（它的倒数 $\frac{\sin(168°-\alpha)}{\sin\alpha}=(\sin 168°)\cot\alpha-\cos 168°$ 严格递减），立即得出①只有一个解. 而不难验证 30° 是它的解，所以 $\alpha=30°$.

44. 一道习题的编制

1978 年，我在中国科学技术大学拟少年班试题. 我们希望推陈出新，从老题目中翻出些新花样来. 为此考虑一个三棱锥 $A-BCD$，沿侧棱 AB，AC，AD 剪开并铺平（在 16 节里我们也是这样做的）. 如果棱锥的高是 AM，那么 A_1M 与 BC 垂直相交于 M_1，并且 A_1M_1 在原来的棱锥中是 BC 边上的斜高. 同样，$MA_2\perp CD$，$MA_3\perp BD$. 这样，我们就可以编出一条问题：

如图 75，$A_1B=BA_3$，$A_1C=CA_2$，$A_2D=DA_3$，自 A_1、A_2、A_3 分别作 BC，CD，DB 的垂线，求证三条垂线共点.

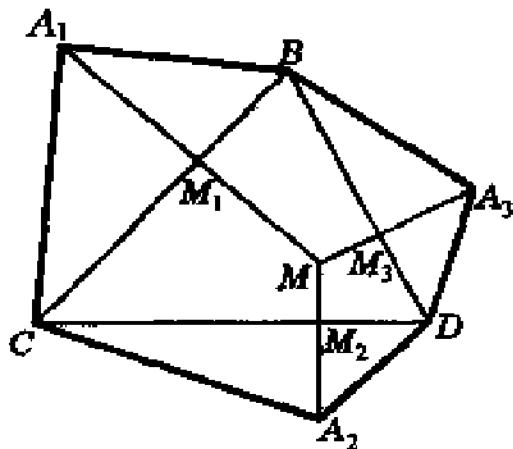


图 75

或等价地，

自点 M 向 $\triangle BCD$ 的三边作垂线，并且在垂线上分别取 A_1，A_2，A_3，如果 $A_1B=BA_3$，$A_1C=CA_2$，求证 $A_2D=DA_3$.

问题编出来了，对不对呢？怎样证呢？

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

如果能把图 75 重新折起来还原成三棱锥，问题就解决了. 但三棱锥同一个顶角处的两个面角之和大于第三个面角，如果$\angle A_1BC$，$\angle A_3BD$都很小，那就不可能将图 75 折成一个三棱锥. 所以还得另找办法.

这里有很多垂线，很自然地想到勾股定理. 不难得到

$$\begin{aligned} DA_2^2 - DM^2 &= CA_2^2 - MC^2 \\ &= CA_1^2 - MC^2 = BA_1^2 - MB^2 \\ &= BA_3^2 - MB^2 = A_3D^2 - MD^2, \end{aligned}$$

因此，

$$DA_2 = A_3D.$$

这样问题就解决了. 更进一步，可以把已知的等式 $A_1B = BA_3$，$CA_1 = CA_2$ 改为不等式 $A_1B \geqslant BA_3$，$CA_1 \leqslant CA_2$，结论改为 $DA_2 \geqslant A_3D$，证明仍然适用.

这里的三角形还可以改成 n 边形.

45. 相切的圆串

如图76，$\odot C_0$，$\odot C_1$半径均为1，互相外切并且均与直线l相切. 作$\odot C_2$与$\odot C_0$，$\odot C_1$外切并且与l相切；作$\odot C_3$与$\odot C_0$，$\odot C_2$外切，并且与l相切；……；作$\odot C_n$与$\odot C_0$，$\odot C_{n-1}$外切并且与l相切. 求$\odot C_n$的半径r_n.

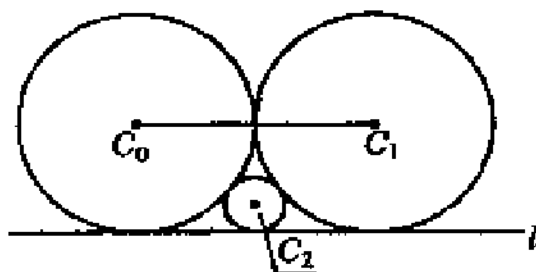


图 76

我们首先考虑图 77，设两圆外切半径为 r，r'，第三个圆与前两个圆外切，半径为 x，这三个圆又都与直线 l 相切，那

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

图 77

么这时有

$$AB=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}=2\sqrt{rx},$$

$$BC=2\sqrt{r'x},$$

$$AC=2\sqrt{rr'}.$$

于是

$$\sqrt{rx}+\sqrt{r'x}=\sqrt{rr'},$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r'}}. \qquad ①$$

这样，在开始所说的问题中，

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+1. \qquad ②$$

由于 $r_1=1$，可逐步算出 $r_2=\frac{1}{4}$，……假定已有 $r_{n-1}=\frac{1}{(n-1)^2}$，那么由②立即得到 $r_n=\frac{1}{n^2}$. 根据归纳法，$r_n=\frac{1}{n^2}$.

如果在前面的图 70 中，$\odot C_3$ 与 $\odot C_1$，$\odot C_2$ 外切；$\odot C_4$ 与 $\odot C_2$，$\odot C_3$ 外切；……；$\odot C_n$ 与 $\odot C_{n-1}$，$\odot C_{n-2}$ 外切；……这些圆都与 l 相切，这时①式成为

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}}. \quad ③$$

于是

$$r_n=\frac{1}{F_n^2}, \quad ④$$

其中 F_n 满足

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}. \quad ⑤$$

并且 $F_0=1,F_1=1,F_2=2,\cdots\left(r_0=1,r_1=1,r_2=\frac{1}{4},\cdots\right)$.

⑤是著名的斐波那契数列，它的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

于是这时

$$r_n=\frac{5}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)^2}.$$

46. 阿基米德的一个定理

大科学家阿基米德对几何有很多研究. 下面就是他发现的一个定理：

设△ABC 的外接圆的弧$\overset{\frown}{ACB}$的中点为 M. 自 M 向 AC、CB 中较长的一条引垂线，设垂足为 D，则 D 平分折线 $AC+CB$ 的长.

设 $AC>CB$，要证

$$AD=DC+CB. \quad ①$$

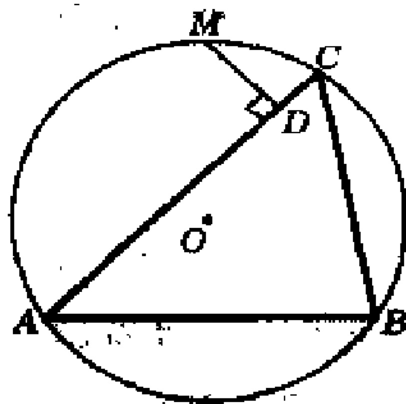


图 78

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

以 M 为圆心，MA 为半径作圆，交 AC 的延长线于 N，则

$$\angle ANB=\frac{1}{2}\angle AMB=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

于是 $\angle CBN=\angle ACB-\angle ANB=\angle ANB$，从而

$$DN=DC+CN=DC+CB.$$

由于 MD 是 AN 的弦心距，所以

$$AD=DN=DC+CB.$$

进一步还有下面的结论：

在图 79 中，如果 C' 是 AB 的中点，那么 $C'D$ 称为 $\triangle ABC$ 的周长平分线。类似地，可以定义另两条周长平分线。则这三条周长平分线交于一点。

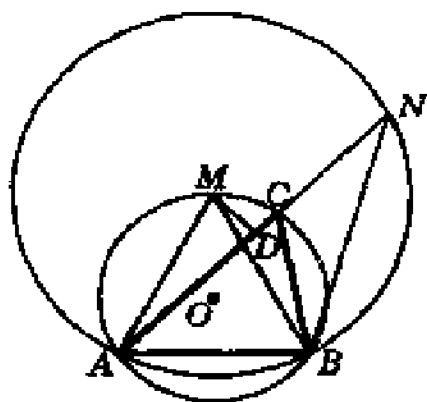


图 79

证明如下：

在图 79 中，$C'D$ 是 $\triangle ABN$ 的中位线，因而 $C'D\parallel BN$。由于 $\angle ANB=\frac{1}{2}\angle ACB$，所以 $C'D$ 与 $\angle ACB$ 的平分线平行。

$\triangle ABC$ 的三个中点所成的三角形 $A'B'C'$ 中，$C'D$ 是 $\angle A'C'B'$ 的平分线。其他两条 $\triangle ABC$ 的周长平分线也是 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线。因此这三条周长平分线交于一点。

47. 平 分 周 长

在第 46 节，已经介绍过平分周长的直线。下面一道 1999 年国际城市竞赛题恰好与此有关。

如图 80，设 K，L 分别为 $\triangle ABC$ 的两个旁切圆在边 AC，CB 上的切点。连结 AB 的中点与 KL 的中点。证明这条直线：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

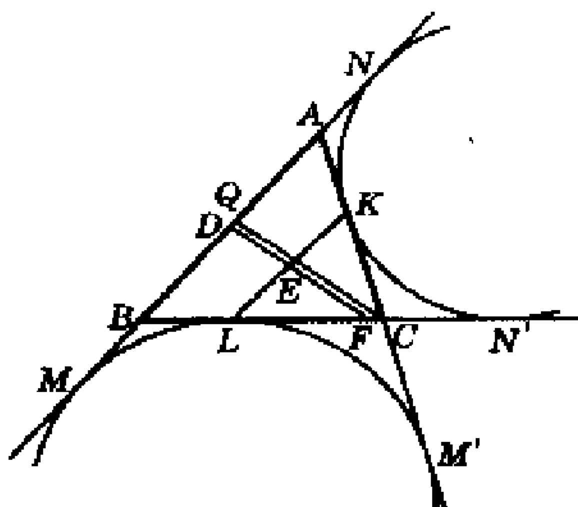


图 80

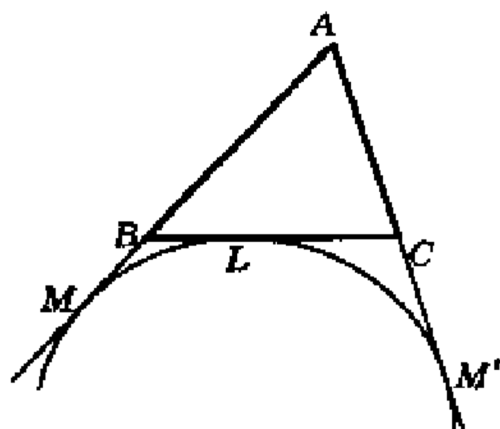


图 81

(a) 将$\triangle ABC$的周长分为两半；

(b) 平行于$\angle ACB$的平分线.

设AB,KL中点分别为D,E,直接证明DE满足(a),(b)不易措手.我们设F点在BC上并且与D平分$\triangle ABC$的周长.转而证明D,E,F共线,而且这条直线平行于$\angle ACB$的平分线CQ.

由第46节,我们已经知道$DF \parallel CQ$.因此只需证明$EF \parallel CQ$.

设直线AB与所说两个旁切圆的切点为M,N.直线AC与BC边的旁切圆相切于M'(图81).易知

$$AB+BL=AM=AM'=AC+CL,$$

所以

$$AM=AM'=\frac{AB+AC+BC}{2}=s,$$

$$BL=s-AB.$$

同理

$$AK=BN-AB=s-AB.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

于是 $BL=AK$，而且

$$LF=FC+CK. \quad ①$$

对于$\triangle CKL$，EF 是平分周长的直线并且 E 是边 KL 的中点. 于是，由上节阿基米德的定理，$EF /\!/ CQ$. 从而结论成立.

从上面的证明还看出 D 到两个旁切圆的切线相等，①又表明 F 到这两个旁切圆的切线相等. 从而 D，F 都在这两个圆的根轴上. 换句话说，平分周长的直线 DF 就是两个旁切圆的根轴.

48. 学校选址（一）

如图 82，A，B，C 三点分别表示三个村庄. 准备联合办一所学校，如果三个村庄上学人数的比是 3∶2∶1，那么学校应设在哪里才能使学生所走路程的和最少？即求一点 P，使得

$$3\cdot PA+2\cdot PB+1\cdot PC \quad ①$$

最小.

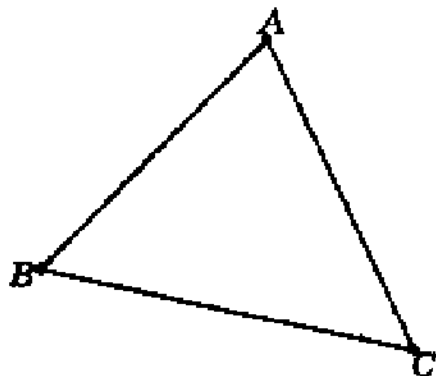


图 82

本题是日本的小学算数竞赛的试题. 算数竞赛由日本读卖新闻社与算数竞赛委员会主办. 委员会的会长是著名数学家、菲尔兹奖获得者广中平佑（日本已有 3 名数学家获得过菲尔兹奖，他们是小平邦彦、广中平佑、森重文）. 广中平佑写过一本自传《奇点的消解》，很受读者欢迎.

图 83 是日本第一届算数竞赛表彰仪式，中座者是广中平佑. 图 84 是广中平佑在第二届算数竞赛开幕式上致词.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com



图 83



图 84

现在回到学校选址的问题.

答案是学校应选在 A 点.因为对任一点 P,都有

$$\begin{aligned}&3\cdot PA+2\cdot PB+1\cdot PC\\&\quad=2(PA+PB)+(PA+PC)\\&\quad\geqslant 2AB+AC.\end{aligned}$$

而且最后的等号仅在 P 与 A 重合时成立.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

本题只利用了最基本的几何不等式：

三角形两边之和大于第三边.

关键之处是注意

$$3=2+1.$$

如果没有这样的等式成立，问题就复杂得多（请看下一节）. 但是，我们千万不要把简单的问题复杂化，做小学问题不要搬出许多定理、公式，就像一个小小的民事纠纷，不必出动坦克、飞机一样. 解题时，想得过分复杂也是不好的.

49. 学校选址（二）

更一般地，设村庄 A,B,C 分别有 p,q,r 个学生，学校应设在何处，才能使学生上学所走的总路程为最小？

设学校在 P 点，问题即求

$$p\times PA+q\times PB+r\times PC \quad ①$$

的最小值.

这就是一般的斯坦纳(Steiner)问题. 当 $p=q=r$ 时，答案是等角中心（即满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$ 的点 P，也称为费马点）或 $\triangle ABC$ 的顶点（当 $\angle A\geqslant 120°$ 时，P 就是点 A）.

设 $p\geqslant q\geqslant r$. 如果 $p\geqslant q+r$，那么与上节相同，答案为 A 点. 设 $p<q+r$. 这时 p,q,r 组成三角形. 设这个三角形的角为 α,β,γ.

如果 $A<180°-\alpha, B<180°-\beta, C<180°-\gamma$，那么在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P，满足

$$\angle BPC=180°-\alpha, \angle CPA=180°-\beta, \angle APB=180°-\gamma$$

（以 BC 为底，在 A 的同侧作含角为 $180°-\alpha$ 的弓形弧. 又以

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

CA 为底，在 B 的同侧作含角为 $180°-\beta$ 的弓形弧．两个弓形弧的交点即是满足上式的 P)．

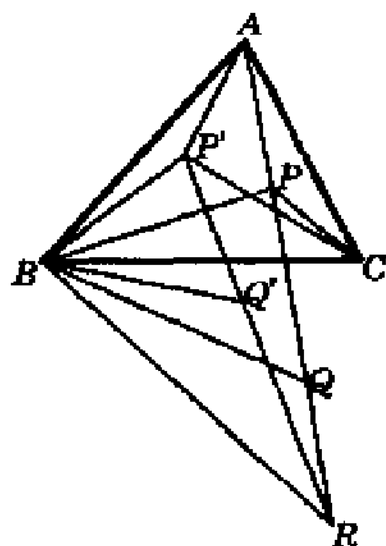


图 85

我们证明这个 P 使①达到最小．

如图 85，在 AP 延长线上取 Q，使

$$PQ=\frac{q}{p}\times PB.$$

再取 R，使

$$QR=\frac{r}{p}\times PC.$$

则

$$\begin{aligned}&p\times PA+q\times PB+r\times PC\\&=p\times\left(PA+\frac{q}{p}\times PB+\frac{r}{p}\times PC\right)\\&=p\times AR.\end{aligned}$$

而对任一点 P'，以 BP' 为一边作角为 α,β,γ 的三角形 $BP'Q'$，则

$$P'Q'=\frac{q}{p}\times P'B,$$

$$BQ'=\frac{r}{p}\times P'B.$$

由于$\triangle BPQ$ 也与角为 α,β,γ 的三角形相似，所以$\angle BQR=180°-\alpha=\angle BPC$，$\triangle BPC$ 与$\triangle BQR$ 相似．从而不难推出 $\triangle BP'C\backsim\triangle BQ'R$，$Q'R=\frac{r}{p}\times P'C$．于是

$$\begin{aligned}&p\times P'A+q\times P'B+r\times q'C\\&=p\times(P'A+P'Q'+Q'R)\\&\geqslant p\times AR\end{aligned}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$= p \times PA + q \times PB + r \times PC.$$

这就证明了所作的 P 使①达到最小.

如果 $A<180°-\alpha$, $B<180°-\beta$, $C<180°-\gamma$ 不全成立，那么不妨设 $B \geqslant 180°-\beta$（这时另两个不等式均成立）.

我们证明 B 使①为最小，即

$$p \times PA + q \times PB + r \times PC$$
$$= p \times BA + r \times BC$$

为最小.

如图 86，作 $\angle CBR=\beta$，并取 R，使 $BR=\frac{r}{p}BC$，则

$$p \times BA + r \times BC$$
$$= p \times (BA + BR).$$

对 $\triangle ABC$ 内一点 P'，作 $\triangle BP'Q'$，使 $\angle P'BQ' = \beta$，$BP' : BQ' = p : r$（即 $\angle BP'Q' = \gamma$，$\angle BQ'P' = \alpha$）. 易知 $\triangle BRQ' \backsim \triangle BCP'$，$RQ' = \frac{r}{p}P'C$. 所以

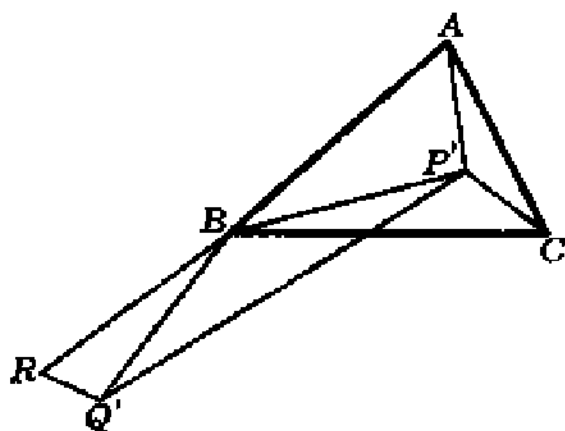


图 86

$$p \times P'A + q \times P'B + r \times P'C$$
$$= p \times (P'A + P'Q' + Q'R).$$

$$\text{折线 } P'A + P'Q' + Q'R > \text{折线 } AB + BR,$$

所以

$$p \times P'A + q \times P'B + r \times P'C > p \times BA + r \times BC.$$

当 P' 在其他位置时，利用外围的折线长大于里面的凸折线的长（可能用到 $P'A+P'Q'+Q'R>AQ'+Q'R$，其中 Q' 的意义同上），同样可证 $BA+BR$ 比较小. 于是 B 使①为最小.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

50. 黄蓉分饼(一)

黄蓉带了6个小孩到桃花岛旅游.

中午取出一块三角形的饼分给大家吃. 其中有一个叫杨过的孩子特别挑剔,希望他分到的一块不多不少,恰好是整个饼的$\frac{1}{7}$.

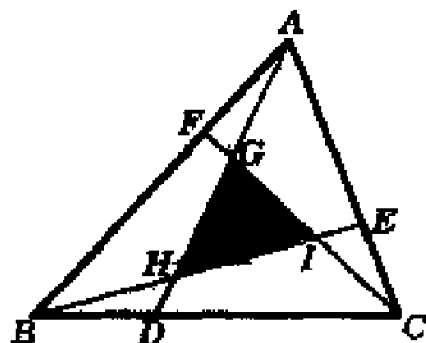


图 87

黄蓉拿起刀来,连劈三刀将饼分成7块:

"杨过,你拿中间的一块,它刚好是$\frac{1}{7}$."

请问:黄蓉是怎么分的?

取D、E、F为三边的点,并且$BD=\frac{1}{3}BC$、$CE=\frac{1}{3}CA$、$AF=\frac{1}{3}AB$.

根据第17节所说,$\frac{AG}{GD}=\frac{3}{4}$,所以,

$$S_{\triangle AGC}=\frac{3}{3+4}S_{\triangle ACD}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$$
$$=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

同理

$$S_{\triangle ABH}=S_{\triangle BCI}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

因此

$$S_{\triangle GHI}=\left(1-3\times\frac{2}{7}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

51. 黄蓉分饼(二)

这次黄蓉带了 8 个小孩和一块四边形的饼. 要将饼分成 9 块,中间一块恰好是(整个饼的)$\frac{1}{9}$.

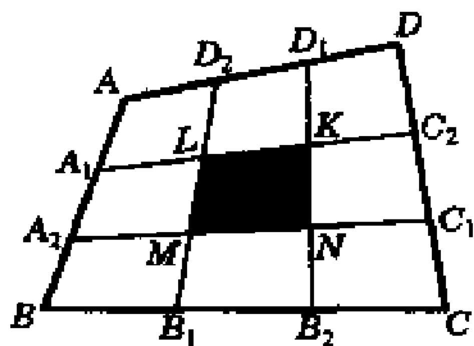


图 88

请问黄蓉是怎么切的? 她怎么能保证中间一块恰好是$\frac{1}{9}$?

设四边形 $ABCD$ 是饼. 将每边都三等分,然后连结对边的相应分点得四条直线(横两刀竖两刀). 可以证明中间一块恰好是$\frac{1}{9}$.

事实上,

$$S_{\triangle BCA_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCA},$$

$$S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD},$$

所以

$$S_{\triangle BCA_2}+S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}(S_{\triangle BCA}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

而 $S_{\triangle A_2C_2A_1}=S_{\triangle A_1C_2A}$, $S_{\triangle C_2A_2C_1}=S_{\triangle C_1A_2C}$,

所以

$$S_{A_1A_2C_1C_2}=S_{\triangle A_2C_2A_1}+S_{\triangle C_2A_2C_1}$$
$$=\frac{1}{2}S_{AC_2C_1B}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)S_{ABCD}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

如果能够证明 L,K 为 A_1C_2 的三分点，M,N 为 A_2C_1 的三分点，那么就有

$$S_{\triangle MNK}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

注意 $A_1D_2/\!/BD/\!/B_1C_2$，便有

$$\frac{A_1L}{LC_2}=\frac{A_1D_2}{B_1C_2}=\frac{A_1D_2}{BD}\times\frac{BD}{B_1C_2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

即

$$\frac{A_1L}{A_1C_2}=\frac{1}{3}.$$

同理(可以用 $A_2B_1/\!/AC/\!/D_1C_2$)

$$\frac{KC_2}{A_1C_2}=\frac{1}{3},\quad \frac{A_2M}{A_2C_1}=\frac{NC_1}{A_2C_1}=\frac{1}{3}.$$

于是结论成立.

更一般地，如果将每边等分为 $2n+1$ 份，连接对边相应的分点，那么中间一块是整个四边形的$\frac{1}{(2n+1)^2}$.

52. 垂 心?

如果 P 是垂心，即高 AD,BE,CF 的交点，那么易证 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的外接圆交于一点(图 89)，而且

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\quad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},\quad \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD}.$$

反过来，P 是否是垂心? 即

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

点 D，E，F 分别是三角形 ABC 的边 BC，CA，AB 上的点，$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$ 的外接圆交于一点 P，而且

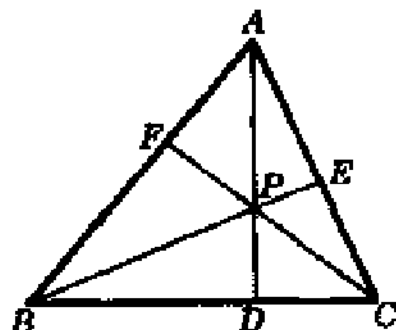


图 89

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\ \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},$$

$$\frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD},$$

是否有 AD，BE，CF 是三角形 ABC 的三条高，即 P 是垂心？

本题看似容易，却不易下手. 特别要注意不可假定 AD，BE，CF 都过点 P.

$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$ 的外接圆交于一点 P，这一条件没有多大用处. 实际上，不论 D，E，F 在三边上的位置如何，相应的三个圆都交于一点，这就是著名的密克(Miquel)定理. 当然，从四点共圆可以推出

$$\angle BFP=\angle AEB \qquad ①$$

等等. 但①只能导出

$$\angle BFP=180^\circ-\angle PEC, \qquad ②$$

而不能导出

$$\angle BFP=\angle PEC. \qquad ③$$

相等的比

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\ \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},\ \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD} \qquad ④$$

是至关紧要的条件. 我们希望利用它们能得到相似三角形. 然而只有②，没有③，所以得不出

$$\triangle BPF\backsim\triangle CPE. \qquad ⑤$$

要得出相似三角形，只有延长 PF 到 C'，使

$$FC'=PF. \qquad ⑥$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

这样，由 $\frac{FC'}{EP}=\frac{BF}{CE}$ 及 $\angle C'FB=\angle PEC$ 可得

$$\triangle C'FB \backsim \triangle PEC, \quad ⑦$$

从而

$$\angle BC'F=\angle CPE.$$

同理

$$\angle AC'F=\angle CPD.$$

以上两式相加得

$$\angle BC'A=\angle DPE$$
$$=180°-\angle ACB.$$

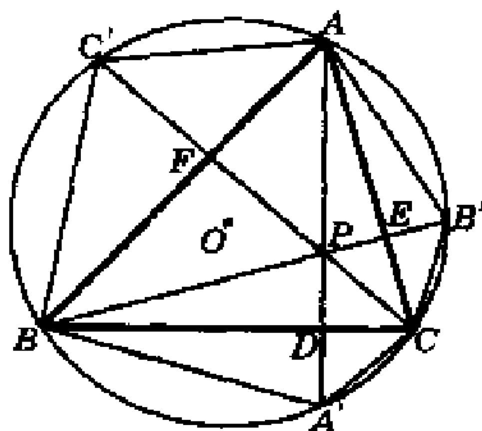


图 90

于是点 C' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 这一点在我们意料之中，因为如果 CF 是高，延长它与外接圆相交于 C'，那么 $FC'=PF$（第 24 节）.

由于⑦，

$$\angle C'BF=\angle PCE,$$

而由同弧上的圆周角相等有

$$\angle C'BF=\angle C'CA.$$

比较以上两式即得 C,P,C' 共线，从而 C,P,F,C' 在一条直线上.

同理，可证 B,P,E 共线. 于是

$$\angle BPF=\angle CPE=\angle BC'F,$$

从而 $\triangle BPC'$ 是等腰三角形，底边 PC' 的中线 $BF\perp PF$，即 CF 是 $\triangle ABC$ 的高.

同理，AD，BE 也是 $\triangle ABC$ 的高.

本题是 1999 年～2000 年波兰数学奥林匹克的试题. 最后通过外接圆来解决问题. 解题之初可能未曾料到，但如果熟

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

悉第 24 节中的结论，并发现 C' 在外接圆上，这就离问题的最终解决没有多远了.

53. 寻找简单的证明

已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，使得 $AB//CD$. 三角形 BCD 的内切圆切 CD 于 E，点 F 是 $\angle DAC$ 的内角平分线上一点，使得 $EF\perp CD$. $\triangle ACF$ 的外接圆交 CD 于点 C 和点 G. 证明：$\triangle AFG$ 为等腰三角形.

几何问题通常总要画一个草图帮助思考. 本题最好较为认真地画一个图. 因为要证 $\triangle AFG$ 为等腰三角形，但究竟哪两条边应当相等，我们并不知道，也许是 $AF=GF$，也许是 $AF=AG$ 或 $AG=GF$. 从草图上，大致能看出是 $AF=GF$，但不能肯定.（或许是图形不准确造成的？）作一个准确的图，就可以断定应当证明

$$AF=GF. \quad ①$$

这样，目的业已明确，不致射错了靶子.

在 $\odot O$（$\triangle ACF$ 的外接圆）内，弦 FG 对 $\angle FCD$，弦 FA 对 $\angle FCA$. $FG=FA$ 的充要条件是 $\angle FCD=180°-\angle FCA$.

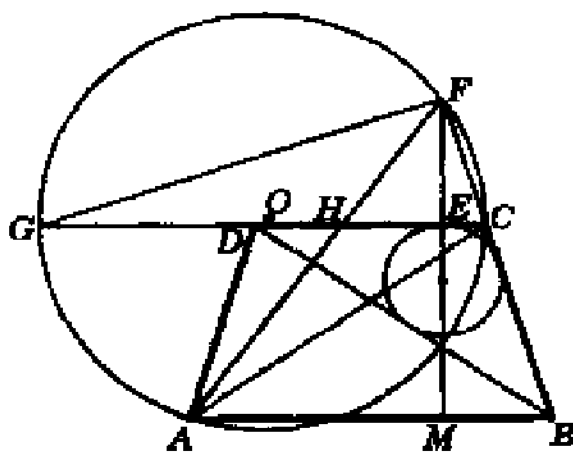


图 91

请注意图 91 中，F，C，B 并不在一条直线上. 如果这三点共线，那么 $\angle FCD=\angle CBA$. 而 $180°-\angle FCA=\angle ACB$. 但 $\angle CBA=\angle ACB$ 只在 $AB=AC$ 时成立. 对一般的

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

等腰梯形，$AB\neq AC$，所以 F,C,B 不共线(图 91 中似乎共线，切莫受图的误导).

如果使用三角，那么可设 $AB=a,CD=b,BC=c,AC=d$，梯形的高为 h，易知

$$h^2=d^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

并且

$$d^2-c^2=ab.$$

而要证明的等式即

$$2\angle FCD=180°-\angle ACD. \qquad ②$$

因为

$$\tan\angle ACD=\frac{2h}{a+b},$$

$$\tan 2\angle FCD=\frac{2\tan\angle FCD}{1-\tan^2\angle FCD},$$

$$\tan\angle FCD=\frac{FE}{CE},$$

$$CE=\frac{b+c-d}{2},$$

$$\frac{FE}{FE+h}=\frac{HE}{AM},$$

其中 H 是 AF 与 CD 的交点，M 是 EF 与 AB 的交点. 易知 $DH=\frac{bc}{c+d}$，AM,DE,HE 均可求出. 从而可通过计算证明②式. 但这样的计算相当麻烦，而且十分无趣. 最好是有一个纯粹几何的证明.

图形虽然比较复杂，几何证明却很简单(当然找到它也未必简单)：

②即证明 FC 平分$\angle ACD$ 的邻补角. 换句话说要证 F 是$\triangle ACD$ 的旁心.(又是旁心!)如果将 AC 延长，这一点就十分

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

清楚了.

$\triangle ACD$的旁心(与A相对的旁心)在$\angle CAD$的平分线AF上;而且旁切圆与CD的切点到C的长应当是$\frac{b+c-d}{2}$($b=CD$,$c=BC$,$d=AC$),即CE,因此E就是旁切圆与CD的切点,从而旁心也在CD的垂线EF上,于是旁心必定是F点,从而②,①成立.

一道看上去很复杂的问题(本题是1999年美国数学奥林匹克第6题),几何解法却意外的简单.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（五）学海无涯

54. 加法定理

这一章的内容多半与三角有关.

如果 α,β 都是锐角，那么以下三角公式成立：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad ①$$

通常称之为加法定理.

我们可以给加法定理一个几何证明.

如图 92，A,B,C,D 是圆上顺次四点，BD 是直径，$\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$. 不妨设 $BD=1$. 由三角函数的定义，

$$AD=\sin\alpha,\ AB=\cos\alpha,$$

$$BC=\cos\beta,\ CD=\sin\beta.$$

又由正弦定理

$$AC=\sin(\alpha+\beta).$$

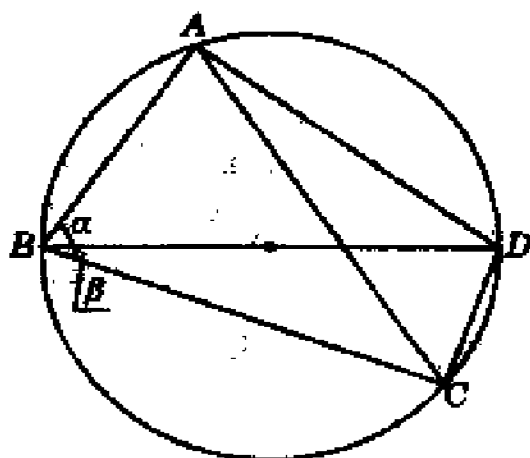


图 92

如果

$$AC\times BD=AB\times CD+BC\times AD, \quad ②$$

将 AC，BD，AD，AB，BC，CD 的值（表达式）代入上式即得①.

为了证明②，在 BA,BC 上分别取 C',A'，使 $BA'=BA$，$BC'=BC$，连接 $A'C'$（图 93）. 易知 $\triangle BA'C'\cong\triangle BAC$，所以 $\angle BC'A'=\angle BCA=\angle BDA$. 从而 $C'A'$ 与 BD 垂直. 所以

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$
\begin{aligned}
BD\times AC &= BD\times A'C' = 2S_{BA'DC}\\
&= 2S_{\triangle BA'D}+2S_{\triangle BDC}\\
&= BA'\times CD+AD\times BC'\\
&= AB\times CD+AD\times BC,
\end{aligned}
$$

即②成立.

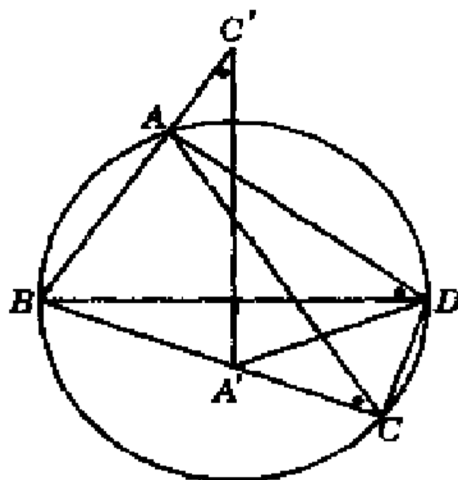


图 93

更一般地,有托勒密(Ptolemy)定理:

对圆内接四边形 $ABCD$,②式成立.

托勒密定理的证明不很困难,在很多书中都能找到(例如前面说过的《近代欧氏几何学》).

55. 余　　弦

我有一位姓余的朋友,是中国科学技术大学数学系的教授.他的女儿十分聪明可爱,余教授便给她起了个大名:余弦.又起了个小名:珂赛茵.这比《悲惨世界》中女主角的名字珂赛特好听得多.

在半径为 1 的圆(单位圆)中,如果弧的含角为 2α,那么弧所对的弦,弦心距恰好是 α 的余弦,即 $\cos\alpha$.

推导很容易,这里就不写了.不过,应当注意,当 α 是锐角时,圆心 O 与弧分居在弦 BC 的两侧,OD 是一条正的线段(图 94);而当 α 是钝角时,圆心 O 与 $\overset{\frown}{BnC}$ 在弦 BC 的同侧,OD 是一条负的线段(图 95).如果认为 OD 永远为正,那么 $OD=\cos\alpha$ 应修正为 $OD=|\cos\alpha|$.

设 $\triangle ABC$ 内接于单位圆.这时 $\overset{\frown}{BC}$ 所含的角是 $2\angle A$,所以圆心 O 到 BC 的距离

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

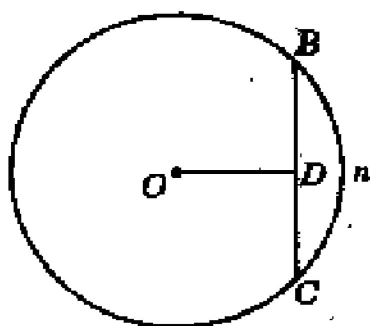


图 94

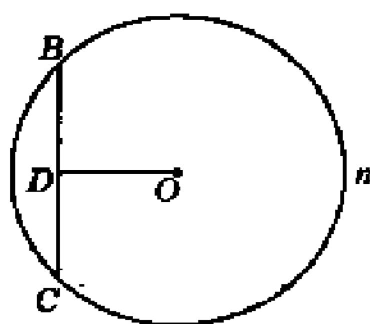


图 95

$$OD=\cos A.$$

同理，在图 96 中，

$$OE=\cos B,\ OF=\cos C.$$

这里约定 O，A 在 BC 同侧时，OD 为正；O，A 在 BC 异侧时，OD 为负．OE，OF 的正负规定与此类似．

有了本节余弦的几何解释，我们便可做下一节的问题了．

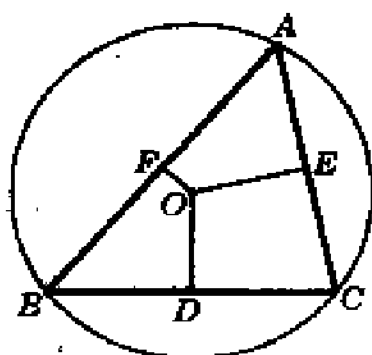


图 96

56. 角平分线与外接圆

与三角形的角平分线有关的几何证明题，往往与三角形的外接圆有关．如图 97，延长$\triangle ABC$ 的角平分线 AD 与外接圆相交于 M，则 M 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，$MB=MC$．外接圆圆心 O 与 M 的连线垂直平分 BC．正是因为有这么多的性质可以利用，所以我们常常作出一些辅助线，构成图 97.

例如 1998 年全国高中联赛第二试第一题：

在$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$（原题无此条件，不要），高 AN 的垂足 N，内心 I，外心 O 共线．证明与 A 相对的旁切圆的半径 $r_a=$ 外接圆半径 R.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

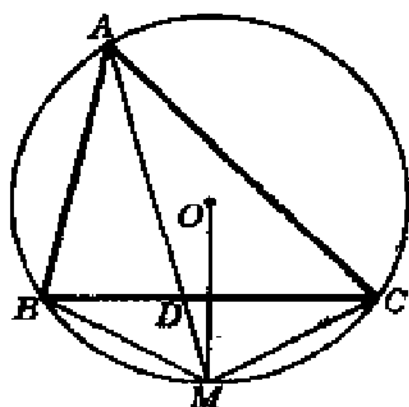


图 97

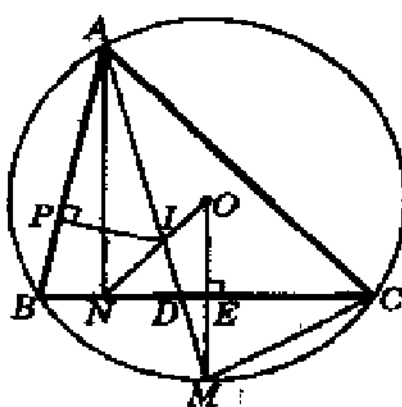


图 98

设直线 AI(角平分线)交外接圆于 M,OM 交 BC 于 E. 设内切圆与 AB 相切于 P. 又设三角形的三条边分别为 a,b,c,$S=\frac{a+b+c}{2}$,高 $AN=h_a$.

本题由四个小题组成:

(1) $r_a=\frac{h_a a}{b+c-a}$;

(2) $\frac{OM}{NA}=\frac{MI}{AI}$ 即 $\frac{R}{h_a}=\frac{MI}{AI}$;

(3) $MI=MC$;

(4) $\frac{MC}{AI}=\frac{CE}{IP}$,即 $\frac{MC}{AI}=\frac{\frac{a}{2}}{s-a}=\frac{a}{b+c-a}$.

原来公布的解答采用三角证法,较为繁难.

上面的证法,实际上得出:

$r_a=R$ 的充分必要条件是 O、I,N 共线.

这四道小题的证明均不太困难(其中(1)由面积,(2),(4)由相似三角形,(3)由 $\angle MIC=\angle MCI$ 分别得出),可见一道来题常由几道简单的基本题组成. 基本题做得纯的自如,难题也就不难了. 反之,如果一道难题做不出,往往是由于某个基

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

本题没有真正搞清楚.需要先“退一步”,将这个基本题解决好.

57. 又是角平分线

锐角三角形 ABC 中,AD 为角平分线,$\angle BAC=\alpha$,$\angle ADC=\beta$.如果

$$\cos\alpha=\cos^2\beta, \quad ①$$

求证:

$$BD\times DC=AD^2. \quad ②$$

本题当然要用一点三角,至少要用三角函数的定义(因为①中出现了三角函数).除此而外,均可以用纯几何的方法证明.

与上题相同,延长 AD 交外接圆于 M,连接外接圆圆心 O 与 M,OM 垂直平分 BC 于 E(图 99).

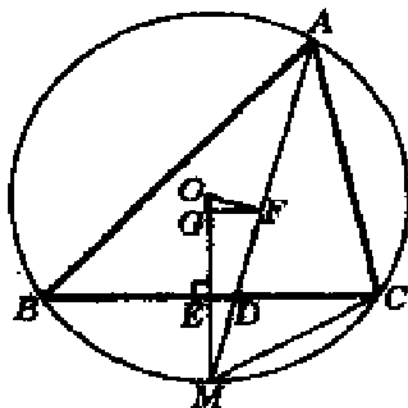


图 99

辅助线基本作好.由圆的相交弦定理,

$$BD\times DC=AD\times DM,$$

所以只需证明 D 是 AM 的中点.

现在必须做的一件事情,就是搞清 $\cos\alpha$ 的几何意义.

不妨设外接圆半径为 1.易知

$$\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC=\alpha,$$

所以

$$OE=\cos\alpha. \quad ③$$

当 α 为钝角时,③应修改为

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$OE = |\cos\alpha| \quad ④$$

(也可以约定 O 在三角形外时，弦心距 OE 为负，这样③不必修改，仍然成立).

作 AM 的弦心距 OF. 同样(易知 $\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle BAM = \angle ACB + \angle MAC = 180° - \beta$)

$$OF = \cos\beta (= |\cos(180° - \beta)|).$$

这样，我们就在图上找到了 $\cos\alpha$ 与 $\cos\beta$. 再进一步，还应找出 $\cos^2\beta$.

易知 $\angle EOF = \angle ADC = \beta$，所以作 $FG \perp OE$，并交 OE 于 G，则

$$OG = OF\cos\beta = \cos^2\beta.$$

由①，G 必与 E 重合. 从而 OE 的垂线 GF 与 BC 重合，GF 与 AD 的交点 F 即 BC 与 AD 的交点 D. 于是 D 是弦 AM 的中点. 结论成立.

在本题中，隐含一个基本问题，即在单位圆中，圆周角 α 所对弦的弦心距是 $\cos\alpha$.

本题亦可用三角函数解，不必添辅助线(这是三角解法的优点. 但三角解法需要熟悉三角函数中的一些公式). 解法如下：

由正弦定理，

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

所以，

$$②\Leftrightarrow\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\cos\alpha-\cos 2\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\alpha=1-\cos 2\beta$$

$$\Leftrightarrow ①.$$

58. 注意几何意义

在一个非钝角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle B=45°$，O和I分别是$\triangle ABC$的外心和内心，且$\sqrt{2}OI=AB-AC$. 求$\sin A$.

本题是1998年中国数学奥林匹克的第一道题（黄宣国供题）.

关于外心、外接圆的定理与命题很多，最重要也是最常用的有正弦定理

$$2R\sin A=a,\ 2R\sin B=b,$$

等等.

关于内心、内接圆的定理与命题也很多.

如设I在三边上的射影分别为I_A，I_B，I_C，则

$$BI_A-I_AC=c-b,$$

$$BI_C-I_CA=a-b,$$

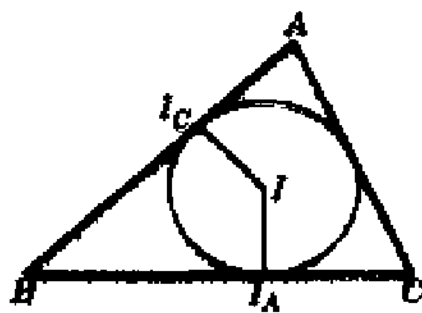


图 100

等等. 这是最常用的公式. 有些复杂的公式，如

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

则很少用到.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

外心与内心的距离 $OI=\sqrt{R^2-2Rr}$（欧拉公式），也是比较深入的性质，远远超出中学教材. 在解题时，非万不得已不用.

解法以简明为上，所利用的工具也应尽量简单，通常不超出中学教材.

解这道题，应当与解其他关于三角形的问题一样，着重考察它的基本元素，即三条边 a,b,c 与三个角 A,B,C.

已知角 $B=45°$，所以由上面的正弦定理，

$$b=2R\sin45°=\sqrt{2}R.$$

A 是要求的，不会很容易得出，C 也如此（C 与 A 之和为 135°，知道一个就知道另一个）. 所以只能从三条边及已知条件 $\sqrt{2}OI=c-b$ 的几何意义入手.

由于 O 在三边上的射影 O_A，O_B，O_C 是三边的中点，所以

$$O_AI_A=\frac{c-b}{2}, \qquad O_CI_C=\frac{a-b}{2}$$

（因为△ABC 不是钝角三角形，所以∠A，∠C 均≥45°，从而 b 是最小边）.

已知条件 $\sqrt{2}OI=c-b$ 导出

$$\frac{\sqrt{2}}{2}OI=O_AI_A,$$

即 OI 在 BC 上的射影 O_AI_A 与 OI 的夹角是 45°. 结合∠B=45°即知 $OI\perp AB$ 或 $OI\parallel AB$. 获得这个结果，是向问题的解决迈进了一大步.

如果 $OI\perp AB$，那么 $O_CI_C=0$，即 $a=b$，从而△ABC 是等腰直角三角形（∠$C=90°$），∠$A=45°$，$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

这种情况是可能的，如图 101，任一等腰直角三角形 ABC ($\angle C=90°$) 中，OI 与 BC 的夹角为 $45°$，$c-b=2O_AI_A=\sqrt{2}OI$.

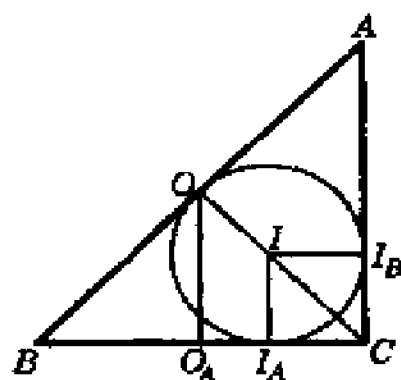


图 101

如果 $OI // AB$，那么

$$O_CI_C=OI=\sqrt{2}O_AI_A,$$

即

$$a-b=\sqrt{2}(c-b). \quad ①$$

又由余弦定理

$$a^2+c^2-ac=b^2. \quad ②$$

①，②都是三边之间的关系. 如果再有一个这样的关系即可解出 a,b,c. 第三个(独立的)关系并不存在. 不过我们要求的不是 a，而是 $\sin A$，所以只需求出 a,b,c 之比. 为此，不妨设 $R=1$，这时由前而的正弦定理

$$b=\sqrt{2}.$$

由①，$c=\dfrac{a+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，代入②并化简得

$$a^2=4\sqrt{2}-2,$$

从而

$$\sin A=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-2}.$$

这种情况也是可能的. 我们先以 $a=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{a+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 为边作 $\triangle ABC$. 由于它们适合②，所以 $\angle B=45°$，并且外接圆半径 $R=1$.

取 AB，BC 中点 O_C，O_A，又在 AB，BC 上取点 I_C，I_A，使

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$O_CI_C=a-b$，$O_AI_A=c-b$，构成矩形 OO_CI_CI'. 则 $OI' \mathrel{\underline{\parallel}} O_CI_C$，从而 OI'在 BC 上射影的长为 O_AI_A，于是 O_AI_A 是 OI' 在 BC 上的射影，从而 I' 即内心 I. 图 102 合乎所有条件.

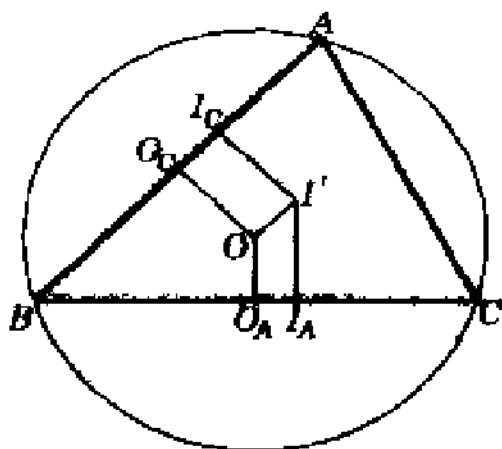


图 102

本题解法有两点值得注意：一是弄清条件 $\sqrt{2}\,OI=AB-AC$ 之几何意义，由此导出 $OI\perp AB$ 或 $OI\parallel AB$，二是在后一种情况，继续利用几何意义导出代数关系①，再结合②，求出三角形的基本元素 a,b,c（与 R 的比），从而求出 $\sin A$.

59. 得用三角

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，O 到三边的距离为 OD、OE、OF，则

$$OD+OE+OF=R+r. \qquad ①$$

①可以用纯几何的方法证明，但难以想到. 利用三角较为自然.

不妨设 $R=1$. 这时 $OD=\cos A$，等等，所以

$$\begin{aligned}&OD+OE+OF-1\\&=\cos A+\cos B+\cos C-1\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\\&=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

而

$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$$

$$=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以①式成立.

纯几何的证明可见《近代欧氏几何学》第 10 章 § 298 中的 f.

60. 2000 年中国数学奥林匹克试题

下面是这届比赛的几何题:

设 $a\leqslant b\leqslant c$ 为 $\triangle ABC$ 的三条边,R,r 分别为外接圆与内切圆的半径,

$$f=a+b-2R-2r.$$

试用角 C 的大小来判定 f 的符号.

首先当 C 为直角时(图 103),

$$R=\frac{c}{2},r=\frac{a+b-c}{2},$$

所以

$$f=a+b-(c+a+b-c)=0.$$

当 C 为钝角时,如图 104,由于

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

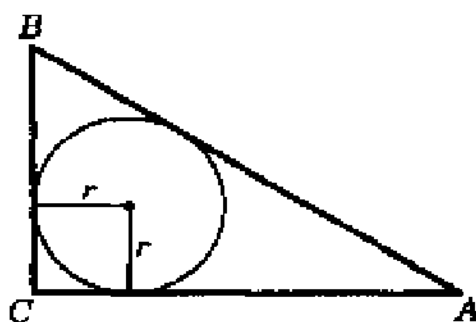


图 103

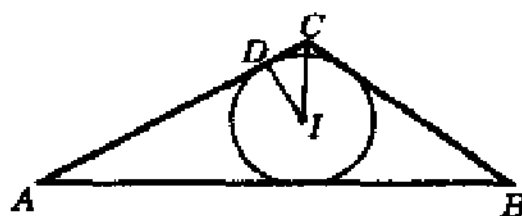


图 104

$$\angle ICD=\frac{1}{2}\angle ACB>45°>\angle CID,$$

所以 $r=ID>CD=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 因而 $2r+c>a+b$. 显然 $2R>2C$,所以 $f<0$.

当 C 为锐角时,情况比较复杂. 但上节我们已经知道

$$R+r=\cos A+\cos B+\cos C,$$

所以问题化为比较 $\sin A+\sin B$ 与 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的大小.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f&=\sin A+\sin B-\cos A-\cos B-\cos C\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\&\quad-\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)\\&=2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\&\quad-\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\\&=\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

因为 $C<90°$, 所以$\frac{C}{2}<45°$, $\cos\frac{C}{2}>\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{C}{2}-$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$\sin\frac{C}{2}>0$.

又 $C>B>A$，所以$\frac{C}{2}>\frac{B-A}{2}>0$，

$$2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}>$$

$$2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}>0.$$

于是此时 $f>0$.

这道几何题的解法以三角变形为主要技术. 如果竞赛中能有一道"纯几何解法"的题，似乎更受欢迎一些.

据说本题是一位印度数学家 Renlaobihutu 提出的问题.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（六）乐　作　舟

61. 吴伟朝先生的问题

学之者，不如好之者．好之者，不如乐之者．学习的乐处之一就是发现问题．

数学中有很多问题，不仅有古老的问题，还不断地涌现出许多新问题．

一个新问题，有时会引出一系列的新概念、新方法、新结果，甚至会由此产生一个新的数学分支．因此，有时候提出一个问题比解决一个问题更重要．

我有一位朋友，广州大学的吴伟朝先生，他很喜欢提问题．下面就是他在《美国数学月刊》上提的一道平面几何问题：

设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点．

（a）设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 相切于 D．$\triangle ABP$，$\triangle ACP$ 的内心分别为 Q，R．证明 $\angle QDR=90°$．

（b）设 $\triangle ABC$ 的旁切圆与 BC 相切于 D'，$\triangle ABP$，$\triangle ACP$ 的旁心分别为 Q'，R'．证明 $\angle Q'D'R'=90°$．并且 $\triangle R'D'Q'\backsim\triangle QDR$．

（c）证明 BC，QR，$Q'R'$ 三条直线共点或互相平行．

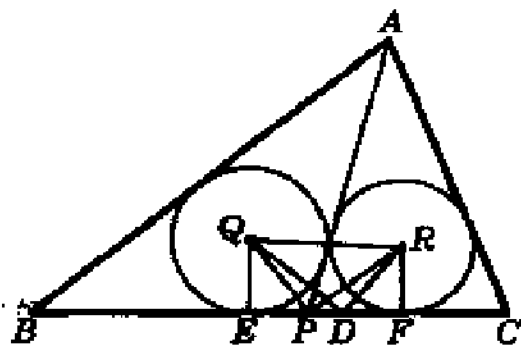


图　105

如图 105，设 $\odot Q$，$\odot R$ 分别与 BC 相切于 E，F，又设 AB

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$=c, AC=b, AP=p, BP=x, PC=y$. 易知

$$PE=\frac{1}{2}(x+p-c),\quad PF=\frac{1}{2}(y+p-b),$$

$$BE=\frac{1}{2}(x+c-p),\quad CF=\frac{1}{2}(y+b-p),$$

$$BD=\frac{1}{2}(x+y+c-b),$$

$$CD=\frac{1}{2}(x+y+b-c).$$

所以 $$DE=BD-BE=\frac{1}{2}(y+p-b)=PF,$$

$$DF=CD-CF=\frac{1}{2}(x+p-c)=PE.$$

又易知$\angle QPR=90°$，$\triangle QEP\backsim\triangle PFR$，从而

$$QE\times FR=EP\times PF=DE\times DF.$$

于是$\triangle QED\backsim\triangle DFR$ 从而易知$\angle QDR=90°$.

同理可证$\angle Q'D'R'=90°$.

另外，注意 Q,P,D,R 四点共圆，所以$\angle RQD=\angle RPD$.

同理，$\angle Q'R'D'=\angle Q'PD'=\angle RPD$.

因此$\triangle R'D'Q'\backsim\triangle QDR$.

至于(c)，请参看下节.

62. 圆的位似中心

19 世纪末的大数学家克莱茵(F. Klein，1849—1925)在他 1872 年担任埃尔朗根大学教授时发表的就职演说《关于新近几何学研究的比较考察》(后来称为埃尔朗根纲领)中，将几何学统一于变换群的观点.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

相似就是一种常见的变换.

对于两个圆$\odot O_1$,$\odot O_2$,设外公切线的交点为$A_{1,2}$(它也是连心线与外公切线的交点),则以$A_{1,2}$为位似中心,作相似变换,可以将$\odot O_1$变为$\odot O_2$.

在这个变换下,每一点P_1变为射线$A_{1,2}P$上的一点P_2,并且

$$A_{1,2}P_1 : A_{1,2}P_2 = r_1 : r_2,$$

其中r_1,r_2分别为$\odot O_1$,$\odot O_2$的半径.

在这个变换下,$A_{1,2}$是唯一的"不动点",即变成自身的点.而且,每一条变为自身的直线一定通过位似中心$A_{1,2}$.

如果再有一个圆$\odot O_3$.设$\odot O_1$,$\odot O_3$的外公切线相交于$A_{1,3}$;$\odot O_2$、$\odot O_3$的外公切线相交于$A_{2,3}$.那么,先以$A_{1,2}$为位似中心,作相似变换,将$\odot O_1$变为$\odot O_2$;再以$A_{2,3}$为位似中心,作相似变换,将$\odot O_2$变为$\odot O_3$.这两次变换的结果将$\odot O_1$变为$\odot O_3$.而直线$A_{1,2}A_{2,3}$在第一次变换下变为自身(因为它过位似中心$A_{1,2}$),在第二次变换下也变为自身(因为它过位似中心$A_{2,3}$),从而结果仍变为自身.因此,直线$A_{1,2}A_{2,3}$通过将$\odot O_1$变为$\odot O_3$的位似中心$A_{2,3}$.

于是,我们有定理:

三个圆,两两的位似中心三点共线.

考虑内公切线的交点,可以得到类似的结果.为了区别起见,内公切线的交点称为两圆的**内位似中心**.而前面所说的外公切线的交点称为**外位似中心**.

现在不难解答第 57 节吴伟朝先生的问题了.

设$\odot Q$,$\odot R$的位似中心为M,$\odot Q$,$\odot R'$的位似中心为N,$\odot Q'$,$\odot R'$的位似中心为M'.则根据上面的结论,M,N,A三点共线(注意A是$\odot Q$,$\odot Q'$的位似中心),M',N,A三点

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

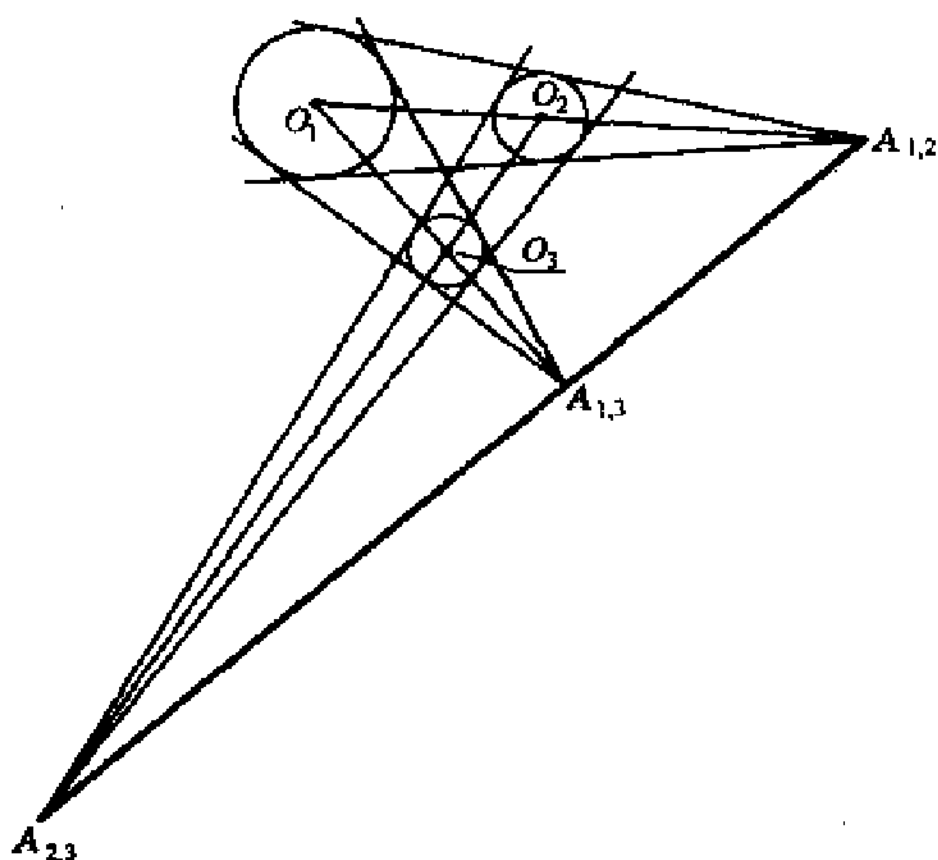


图 106

共线. 从而 M, N 都是 AR 与 BC 的交点，这两点必定重合. 即 QR, $Q'R'$, BC 三条直线交于同一点 M.

唯一的例外出现在 $QR /\!/ BC$ 时. 这时⊙Q, ⊙R 的半径相等，$AB=AC$ 并且 AP 是高，易知⊙Q', ⊙R' 的半径也相等. 因此 QR, BC, $Q'R'$ 互相平行.

63. 马尔法提问题

意大利数学家马尔法提(Malfatti，1731—1807)于 1803 年提出一个作图问题：

在已知的三角形内作三个圆，两两相切，并且每一个圆与三角形的两条边相切.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

斯坦纳(Steiner,1796—1863)1826年给出的作法最为简单.

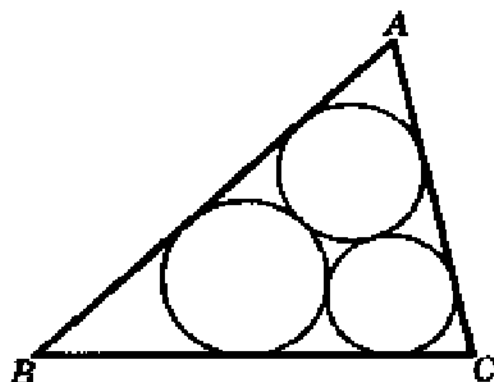


图 107

首先作$\triangle ABC$的三条角平分线,定出内心I.

然后作$\triangle IBC$,$\triangle ICA$,$\triangle IAB$的内切圆.每两个圆已有一条内公切线(分别为IC,IB,IA),再作另一条内公切线OP,QR,ST.

最后作圆与AB,AC,OP相切,作圆与AB,BC,QR相切,作圆与BC,CA,ST相切.

这三个圆即满足要求.

作法虽然不长,但真正去作却不容易作得准确.证明更是一件相当困难的工作.

64. 叶中豪先生的问题

我的好朋友叶中豪先生是位几何爱好者.这本书中,如果有他的题,是件有意思的事.所以本节就介绍一个他提的问题.

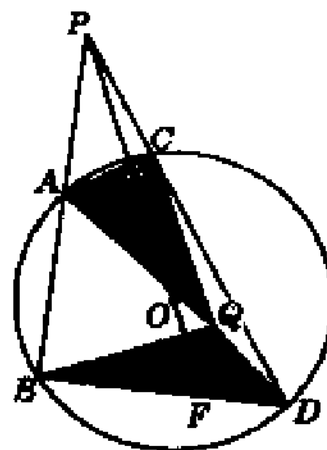


图 108

设$\odot O$的弦BA,DC的延长线相交于P,直线PO分别交AC,BD于E,F.过E作AC的垂线,过F作BD的垂线,相交于Q(图108).

求证:$S_{\triangle QAC}=S_{\triangle QBD}$. ①

如果设$\angle OEA=\alpha$,$\angle OFB=\beta$,那么由正弦定理,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{QE}{QF}=\frac{\sin\angle QFE}{\sin\angle QEF}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

所以要证的结论即

$$\frac{AC}{BD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad ②$$

过 P 作 OP 的垂线，设它分别与直线 AC，BD 相交于 R，Q. 由蝴蝶定理，

$$RP=PQ.$$

又$\angle CRP=90°-\alpha$，$\angle BQP=90°-\beta$，所以由正弦定理，

$$\frac{PC}{\cos\alpha}=\frac{RP}{\sin\angle ACP}=\frac{PQ}{\sin\angle ABQ}=\frac{PB}{\cos\beta},$$

从而

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{PC}{PB}.$$

又由$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$，

$$\frac{PC}{PB}=\frac{AC}{BD}.$$

所以②，①成立.

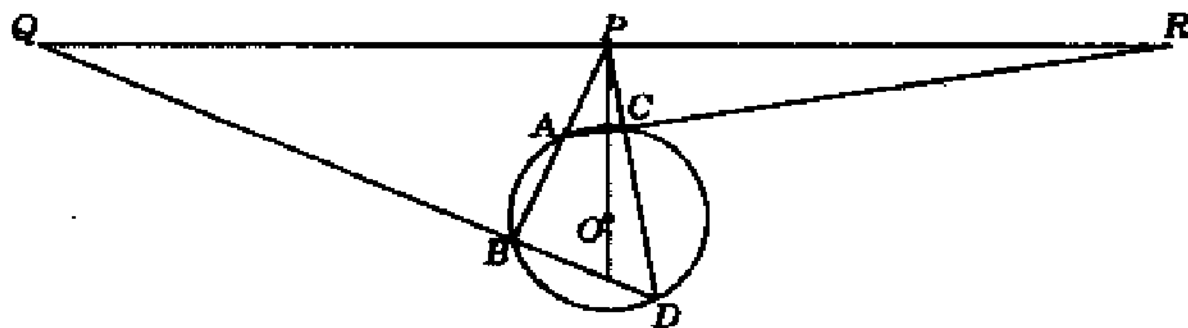


图 109

65. 国际会议上的问题

大概是 1984 年吧，国际双微（微分几何、微分方程）在我国召开. 会上有人提出一个初等的问题：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

在$\triangle ABC$的边上取三个点D,E,F，使得沿着三角形的周界从D到E，从E到F，从F到D，所走的长都相等(即都等于$\triangle ABC$的周长$a+b+c$的$\frac{1}{3}$). 求证：

$$\triangle DEF \text{ 的周长} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ①$$

这道题出乎意料地难倒不少数学家. 在会议期间没有能够解决. 会后又有不少人研究. 1987年，陶懋颀、张景中、杨路在《中国科学》第8期"用多点例证法证明一个几何不等式"一文中给出了一个证明. 曾振权也给出一个证明. 后来发现1960年，A. Zirakzadeh已有一个初等几何的证明，但非常复杂.

杨学枝等给出一个简单的初等证明.

如图110，设E,F在BC上的射影分别为E',F'，则

$$EF \geqslant E'F' = a-(BF\cos B+CE\cos C).$$

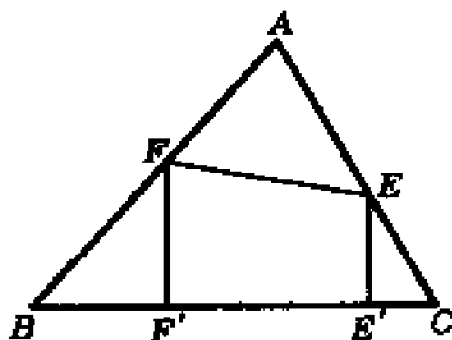


图 110

同样的几个式子相加，得

$$\triangle DEF \text{ 的周长} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(3-\cos A-\cos B-\cos C).$$

由于$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2}$，从而①式成立.

66. 孙斌勇同学的问题

某年，当时在教育部理科试验班读书的孙斌勇同学提出一个问题：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

P,Q 在$\triangle ABC$中，并且

$$PA + BC = PB + CA = PC + AB,$$

$$QA - BC = QB - CA = QC - AB.$$

求证：P,Q 与内心 I 共线.

问题颇为有趣，证明不太容易.

设内切圆与 BC,CA,AB 分别切于 D,E,F. 分别以 A，B,C 为圆心，AF,BD,CE 为半径作圆.

不难证明 $PA>AF$（我们将这个证明补在最后），而且 $AF=s-a$，$BD=s-b$，$CE=s-c$，所以

$$PA - AF = PB - BD = PC - CE,$$

$$QA + AF = QB + BD = QC + CE.$$

以 P 为圆心，$PA-AF$ 为半径作圆，这圆与$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 均外切.

以 Q 为圆心，$QA+AF$ 为半径作圆，这圆与$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 均内切.

设$\odot A$ 分别与$\odot Q$，$\odot P$ 相切于 M,N，直线 MN 再交$\odot Q$ 于 M'，交 PQ 于 L（图 111）.

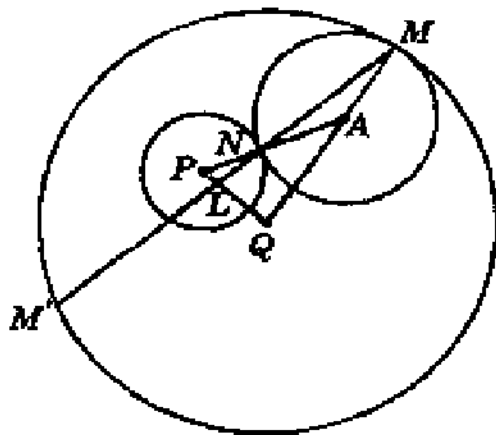


图 111

由门奈劳斯定理，

$$\frac{MA}{MQ} \times \frac{NP}{NA} \times \frac{LQ}{LP} = 1,$$

所以 $$\frac{LP}{LQ} = \frac{NP}{MQ}.$$

NP,MQ 分别为$\odot P$，$\odot Q$ 的半径，所以 L 是$\odot P$，$\odot Q$ 的内位似中心.

L 对$\odot A$ 的幂是

$$LN \times LM = LM' \times LM \times \frac{LN}{LM'},$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

其中 $LM\times LM'$ 是 L 对$\odot Q$ 的幂，而由于 L 是内位似中心，$\frac{LN}{LM'}$ 是$\odot P$，$\odot Q$ 的半径之比. 于是$\odot L$ 对$\odot B$，$\odot C$ 的幂也都是同样的值，从而 L 是$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 的根心.

但内心 I 显然是$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 的根心(I 到这三个圆的切线的长即内切圆的半径). 因此 L 与 I 重合，P、Q、I 三点共线.

最后说明一下 $PA>AF$.

显然 $PB+PC>BC$，$PC+PA>CA$，$PA+PB>AB$，所以三式相加得

$$PA+PB+PC>s.$$

而

$$\begin{aligned}&AF+BD+CE\\&=(s-a)+(s-b)+(s-c)=s,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&PA+PB+PC>AF+BD+CE,\\&(PA-AF)+(PB-BD)+(PC-CE)\\&=3(PA-AF)>0.\end{aligned}$$

因此 $PA>AF$.

注记：在国外，P，Q 两点分别被称为外索迪圆和内索迪圆的圆心. 索迪(Frederick Soddy，1877—1956)是英国化学家，因发现同位素而获得 1921 年诺贝尔化学奖.

深入的研究表明，不但内心 I 落在 P，Q 连线上，而且$\triangle ABC$ 的 Gergonne 点也位于这条直线上，且这四点恰好构成调和点列.

关于 P，Q 两点还有不少进一步的研究结果. 20 世纪 60 年代～90 年代，有多篇文献涉及其性质的探讨. 例如 P 点具有如下奇妙的特性：过 P 点的三条塞瓦线刚好可把$\triangle ABC$ 分割成三个圆外切四边形. 其他点都不具备这一性质.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

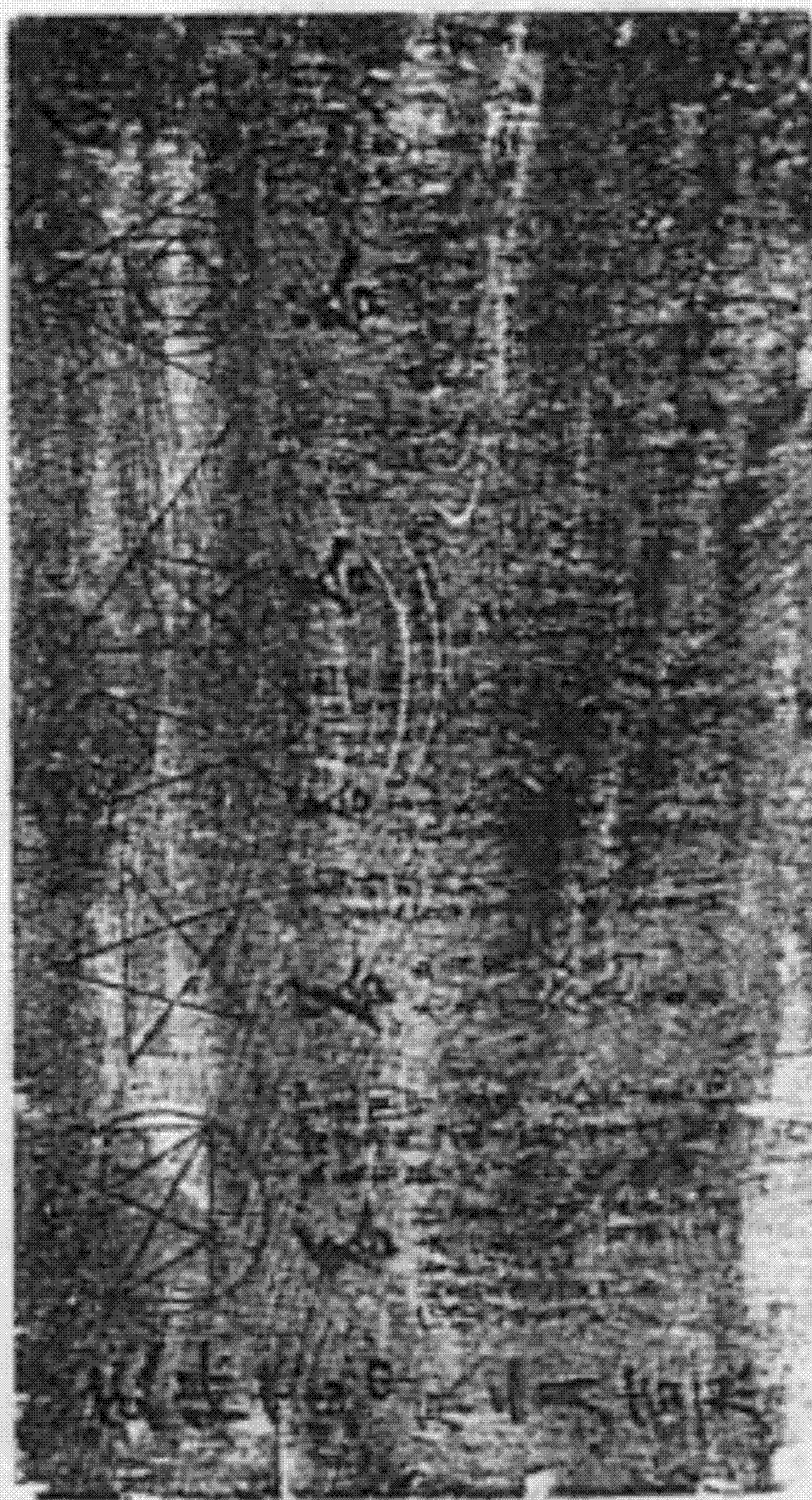


图 112

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

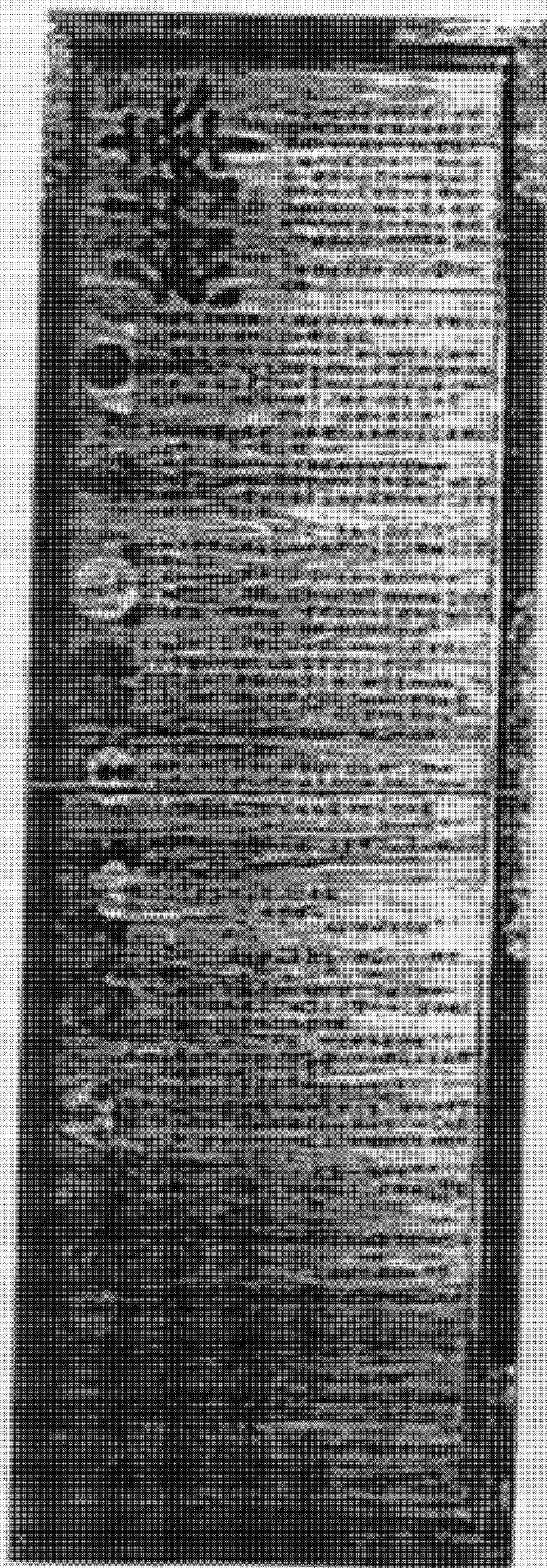


图 113

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

需要指出的是，P，Q 两点的存在是有条件的，原三角形的最大角不能超过 $2\arcsin\frac{4}{5}$. 这相当于$\triangle ABC$ 的基本元素必须满足条件

$$a+b+c>4R+r,$$

其中 R，r 分别表示$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径. 否则，这两点就不存在了.

67. 寺庙里的几何题(一)

日本古代的寺庙里常常悬挂一些木牌，上面铭刻着数学家发现的定理. 下面的两个图是最近发现的.

本节先介绍一道题，它是 1832 年牛岛(Ushijima)的一个定理.

已知图 114 中，$\odot O_i$ 的半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$.

求证：$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.

证法不太难(比想像的要简单得多)，但有两点值得注意. 首先将要证的结论改为

$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}. \quad ①$$

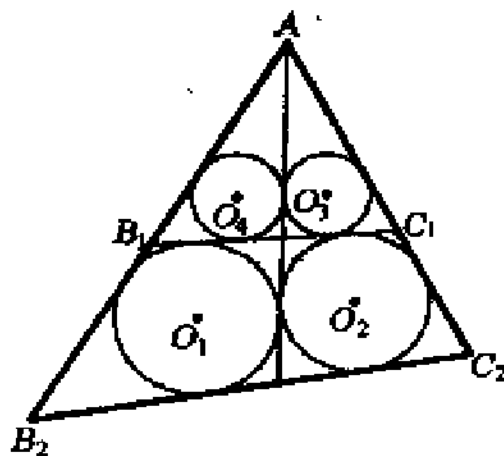


图 114

这样，我们就只需要证明

$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=c, \quad ②$$

$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}=c, \quad ③$$

其中 c 是一个常数，只与 A 点及直线 B_1C_1，B_2C_2 有关. 换句话说，我们将"连体婴儿"分

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

开，只需单独考虑圆形的左半边与右半边.

其次，B_2C_2 这条线也可撤去，而换成$\odot O_1$ 的、与 B_1C_1 平行的切线（图 115）. 从而设 A 到 B_1C_1 的距离为 h，便有

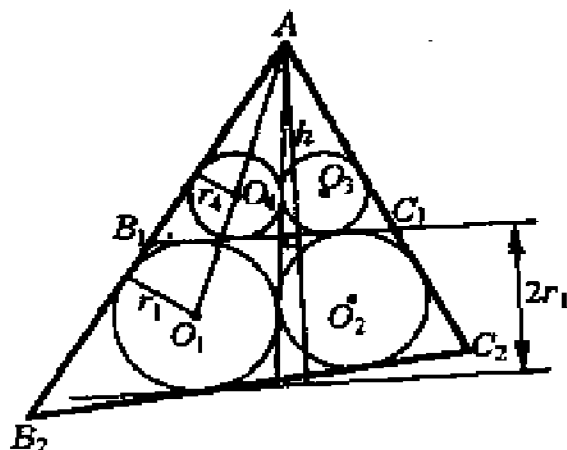


图 115

$$\frac{h}{h+2r_1}=\frac{AO_4}{AO_1}=\frac{r_4}{r_1},$$

即
$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=\frac{2}{h}.$$

同理
$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}=\frac{2}{h}.$$

所以结论成立.

68. 寺庙里的几何题（二）

日本的深川（Fukagawa）专门写了两本书《Japanese Temple Geometry Problems》,《Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries》. 介绍日本寺庙里的几何题.

本节从中摘选一些问题：

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. C'在 AB 上，

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$BC'=BC$. P 在 BC 上，$C'P$ 平分$\triangle ABC$ 的面积. 求 PC'（图 116）.

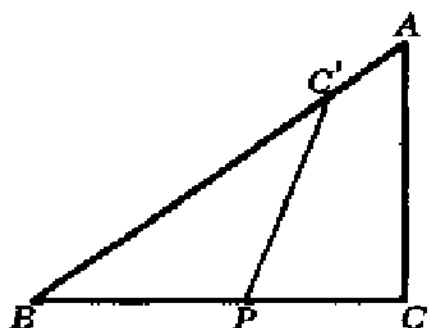


图 116

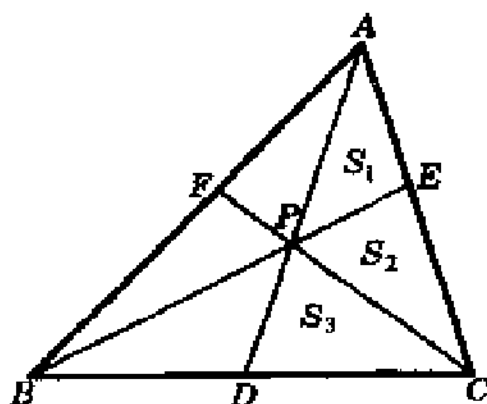


图 117

2. P 在$\triangle ABC$ 内，AP，BP，CP 分别交对边于 D，E，F. 已知图中面积 S_1，S_2，S_3，求$\triangle ABC$ 的面积（图 117）.

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，I 为内心. 求证 $AI\cdot BI=\sqrt{2}AB\cdot r$（图 118）.

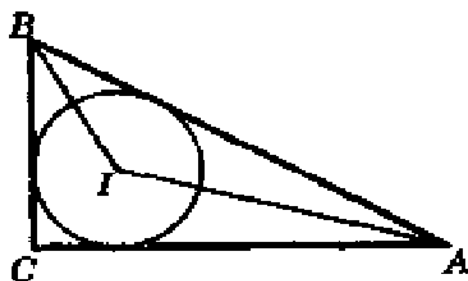


图 118

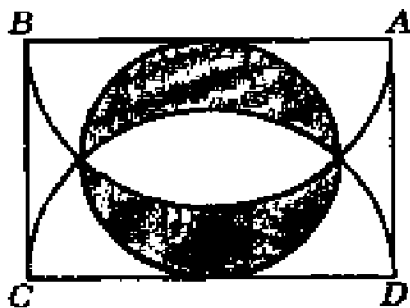


图 119

4. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2\sqrt{2}$. 分别以 AB，CD 为直径，在矩形内作半圆. 又过它们的两个交点作圆与 AB，CD 相切. 求图中阴影部分（两个月形）的面积（图 119）.

5. $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为 10. 过 A 作不穿过三角形的直线 l. $\odot(O_1,r_1)$与 AB，l，BC 相切. $\odot(O_2,r_2)$与 AC，l，BC 相切. 证明当 l 变化时，r_1+r_2 始终为常数（面 120）.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

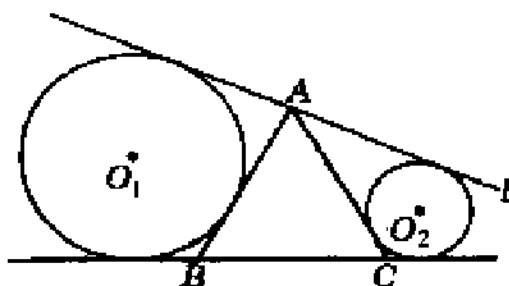


图 120

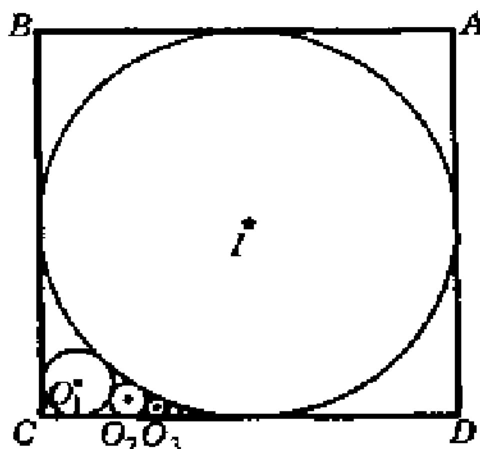


图 121

6. 正方形 $ABCD$ 边长为 10，$\odot r$ 是内切圆. 作圆列 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1,2,\cdots)$；$\odot(O_1, r_1)$ 与 CD, CB 及 $\odot I$ 相切；$\odot(O_2, r_2)$ 与 CD, $\odot O_1$, $\odot I$ 相切；……求 r_n（图 121).

7. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 作三个正方形及三个圆 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1,2,3)$. 证明 $r_1r_3=r_2^2$（图 122).

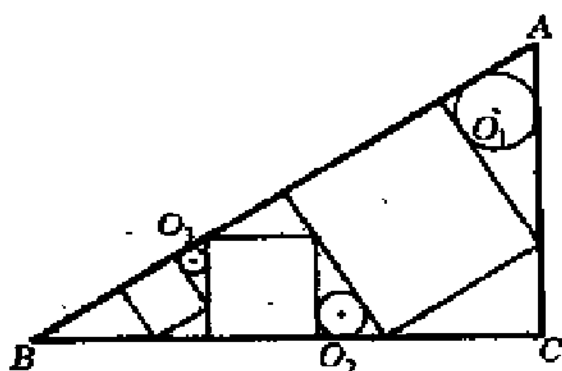


图 122

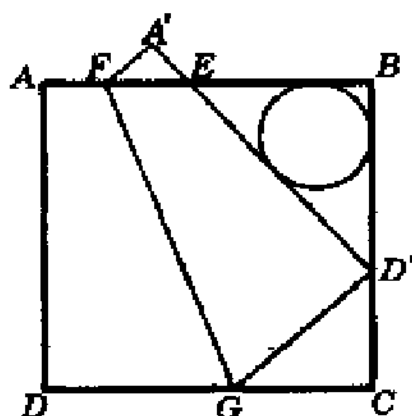


图 123

8. 正方形纸片 $ABCD$ 折叠时 D 落到 BC 上一点 D', A 落到 A'. $A'D'$ 交 AB 于 E. 作 $\triangle BED'$ 的内切圆. 证明它的半径等于 $A'E$（图 123).

9. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$, $AC=4$, $BC=3$. $\odot(O_1, r_1)$, $\odot(O_2, r_2)$, $\odot(O_3, r_3)$ 分别为 $\triangle ADG$, $\triangle EBF$, $\triangle GFC$ 的内切圆，$DEFG$ 是一个矩形. 证明当 $DEFG$ 的面积最大时，$r_1^2+r_2^2$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$=r_3^2$(图 124).

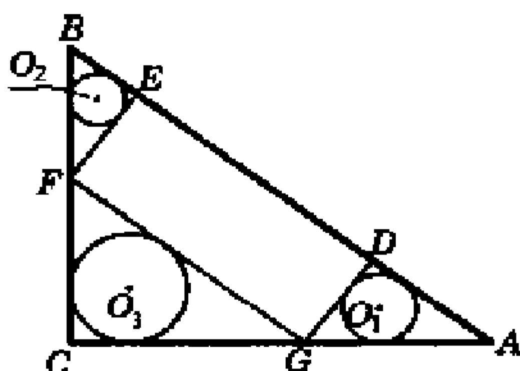


图 124

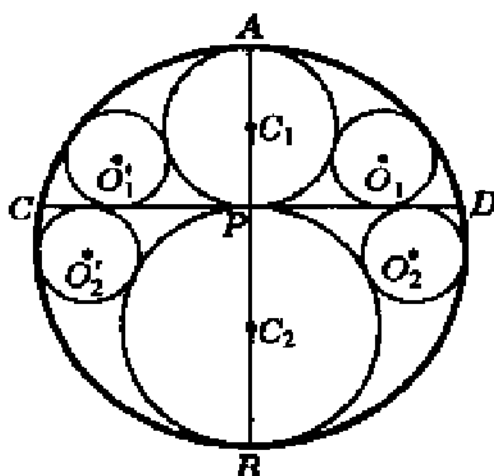


图 125

10. $\odot O$ 的直径 $AB=10$,弦 $CD\perp AB$,垂足为 P,$PA=4$. $\odot C_1$,$\odot C_2$ 分别以 PA,PB 为直径. $\odot(O_1,r_1)$,$\odot(O_2,r_2)$ 均与 $\odot O$ 内切,并均与 CD 相切. $\odot(O_1,r_1)$ 与 $\odot C_1$ 外切,$\odot(O_2,r_2)$ 与 $\odot C_2$ 外切. 求证 $r_1=r_2$(图 125).

11. 四边形 $ABCD$ 有外接圆,又有内切圆 $\odot(I,r)$(注:图中未画出),切点为 E,F,G,H. 求证四边形 $AEIH$,$EBFI$,$IFCG$,$IGDH$ 都有内切圆. 设这四个内切圆为 $\odot(I_i,r_i)$($i=1,2,3,4$),求证:$r_1+r_3=r_2+r_4=r$(图 126).

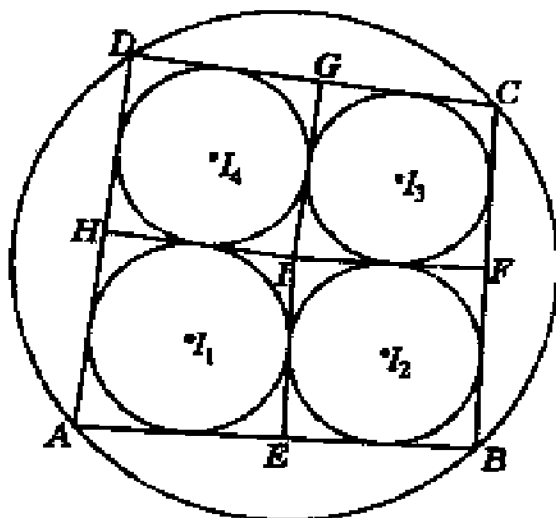


图 126

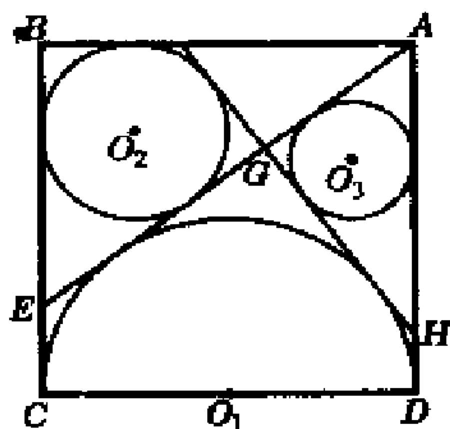


图 127

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 4. 半圆以 CD 为直径，圆心为 O_1，半径为 r_1. AE 与半圆相切，E 在 BC 上. $\odot(O_2, r_2)$ 是 $\triangle ABE$ 的内切圆. $\odot O_1$，$\odot O_2$ 的一条外公切线交 AD 于 H，交 AE 于 G. $\odot(O_3, r_3)$ 是 $\triangle AGH$ 的内切圆. 求 r_2，r_3（图 127）.

13. 等边三角形 ABC 的边长为 10. 线段 AA'，BB'，CC' 围成等边三角形 $A'B'C'$. 如果 $\triangle A'B'C'$，$\triangle ABB'$，$\triangle BCC'$，$\triangle CAA'$ 的内切圆半径都是 r，求 r（图 128）.

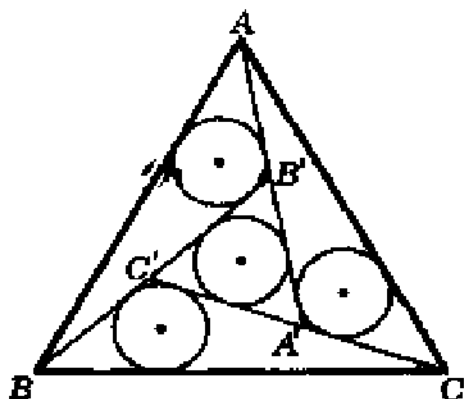


图 128

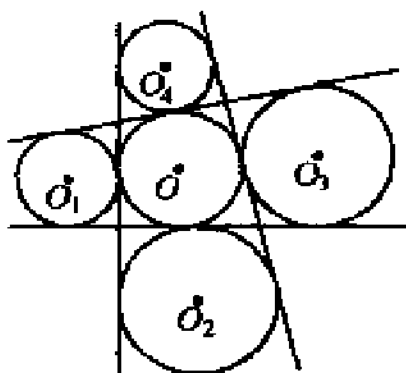


图 129

14. $\odot(O, r)$ 的四条切线分别与四个圆：$\odot(O_i, r_i)$（$1 \leqslant i \leqslant 4$）相切. 求证：$r_1 r_3 = r_2 r_4$（图 129）.

15. P 在 $\odot(O, r)$ 中，四个圆 $\odot(O_i, r_i)$（$i=1,2,3,4$）都过 P，并与 $\odot O$ 内切. $\odot O_1$，$\odot O_3$ 在 P 点外切，$\odot O_2$，$\odot O_4$ 也在 P 点外切. 求证 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$（图 130）.

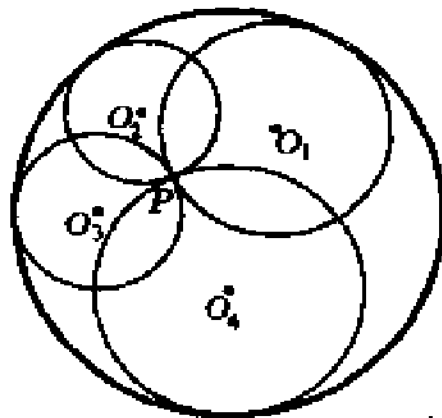


图 130

16. 正三角形 CDP 在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中，AP 交 BC 于 Q. 证明可以在 CD 上找一点 R

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

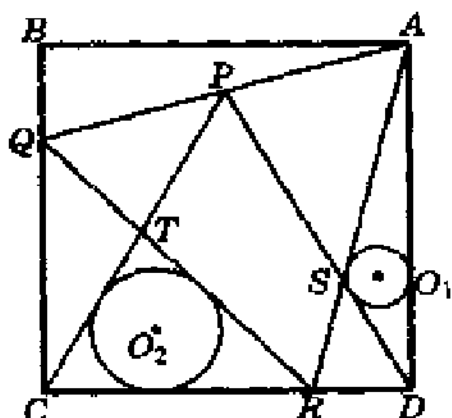


图 131

使$\triangle AQR$为正三角形.求出图中两个圆的半径r_1,r_2,并证明$2r_1=r_2$(图 131).

17. $\odot(O_1,r_1)$与$\odot(O_2,r_2)$外切,并分别切直线l于A,B.$\odot(O_3,r_3)$与$\odot O_1$,$\odot O_2$外切并与l相切.证明不论r_1,r_2如何变化,$\odot O_3$与一个过A,B的固定圆相切(图 132).

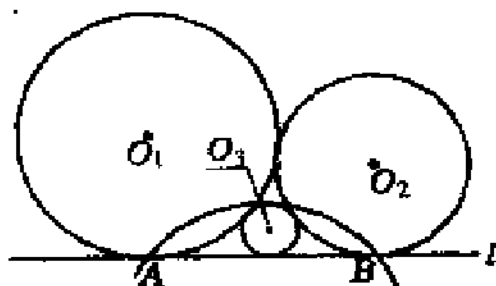


图 132

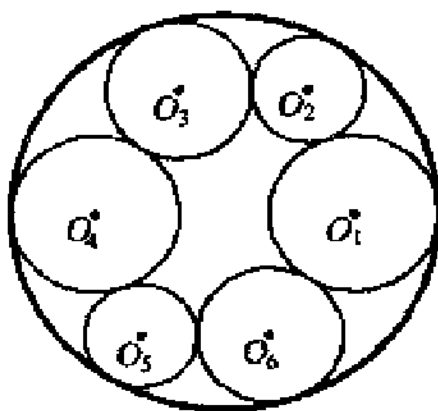


图 133

18. $\odot(O,r)$内有 6 个圆:$\odot(O_1,a)$,$\odot(O_2,b)$,$\odot(O_3,c)$,$\odot(O_4,a)$,$\odot(O_5,b)$,$\odot(O_6,c)$均与$\odot O$内切,并依次外切.如果$r\geqslant a+b+c$,证明$r=a+b+c$,并且$O_1O_2 /\!/ O_3O_6$(图 133).

19. $\triangle ABC$中,$\odot(O_1,r_1)$与AB,AC相切.BD、CE是

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$\odot O_1$ 的切线，相交于 F. $\odot(O_2, r_2)$ 是 $\triangle FBC$ 的内切圆. 将 r_2 用边长 a, b, c 及 r_1 表示(图 134).

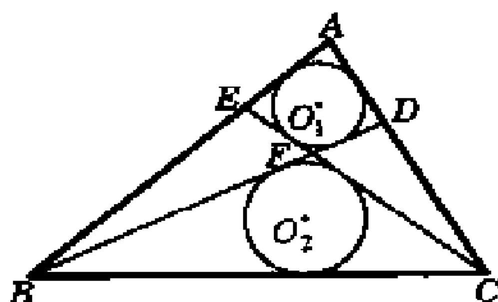


图 134

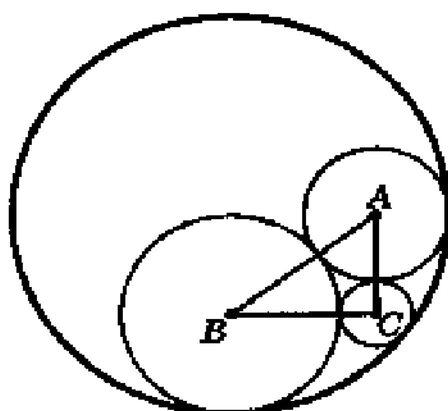


图 135

20. $\odot(A, r_1)$, $\odot(B, r_2)$, $\odot(C, r_3)$ 互相外切，并与 $\odot(O, r)$ 内切. 如果 $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 求 r_1, r_2, r_3 及 r, 并证明 $r = r_1 + r_2 + r_3$(图 135).

69. 寺庙里的几何题(三)

本节给出上节问题的解答.

1. 取 AB 中点 E, 连接 CE. 则因为

$$\frac{S_{\triangle BPC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BP \times BC'}{AB \times BC} = \frac{BP}{AB} = \frac{1}{2},$$

所以
$$BP = \frac{1}{2}AB = CE.$$

从而
$$\triangle BEC \cong \triangle BPC',$$
$$PC' = CE = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}.$$

2. $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{S_1 + S_2}{S_3}$, $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{S_2}{S_1}$. 由门奈劳斯定理,

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{BC}{DB}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_2(S_1+S_2)}{S_1S_3}.$$

所以由此得性质

$$\frac{BC}{DC}=\frac{S_2(S_1+S_2)}{S_1S_2+S_2^2-S_1S_3}.$$

$$S=(S_1+S_2+S_3)\frac{BC}{DB}$$
$$=\frac{S_2(S_1+S_2)(S_1+S_2+S_3)}{S_1S_2+S_2^2-S_1S_3}.$$

3. $\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle CBA+\frac{1}{2}\angle CAB$

$=135^\circ$,

$$S_{\triangle AIB}=\frac{1}{2}r\cdot AB=\frac{1}{2}AI\cdot IB\cdot\sin 135^\circ,$$

所以 $\sqrt{2}\cdot AB=AI\cdot IB$.

4. $BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. 弓形的圆心角为直角.

所求面积

$$=2\times\left[\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AB}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\pi}{4}\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{AB^2}{4}=4.$$

5. 两条外公切线的和 $=3\times10=30$，所以

$$\frac{r_1}{\sqrt{3}}+10+\frac{r_2}{\sqrt{3}}=\frac{30}{2},\quad r_1+r_2=5\sqrt{3}.$$

6. $IC=5+(1+\sqrt{2})r_1$，所以 $r_1=5(3-2\sqrt{2})$. 由

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

得
$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}-\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{5}},$$

$$r_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{n-1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2=\frac{5}{(n+\sqrt{2})^2}.$$

7. 设三个正方形的边长为 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant t_3$. 图中以 t_1 为一条直角边，一个锐角为 B 的直角三角形与以 t_2 为一条直角边，一个锐角为 B 的直角三角形相似，而它们的内接正方形边长分别为 t_2, t_3，所以

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{t_2}{t_3},$$

即 t_1, t_2, t_3 成等比数列.

又分别以 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 为内切圆的三个直角三角形相似，而它们对应的直角边长为 t_1, t_2, t_3，所以

$$t_1 : t_2 : t_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

从而 r_1, r_2, r_3 也成等比数列，即

$$r_2^2 = r_1 r_3.$$

8. 设正方形边长为 1，$DG=x$，$CD'=y$，则 $GC=1-x$，$D'B=1-y$，$GD'=x$. 由相似，

$$D'E = x\cdot\frac{1-y}{1-x},\qquad BE=y\cdot\frac{1-y}{1-x}.$$

$r=A'E \Leftrightarrow BD'+BE-D'E=2(1-D'E) \Leftrightarrow x\cdot\dfrac{1-y}{1-x}=\left(1-\dfrac{1-y}{1-x}y\right)+y \Leftrightarrow 2x-1=y^2$. 而在 $\triangle GCD'$ 中，

$$y^2=x^2-(x-1)^2=2x-1.$$

9. 设 $EF=x$，$FG=y$，则 $\dfrac{3x}{4}+y+\dfrac{4x}{3}=5$，即

$$25x+12y=60.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$xy=\frac{(25x)(12y)}{25\cdot 12}.$$

当 $25x=12y$，即 $x=\frac{6}{5}$ 时最大. 这时 $y=\frac{5}{2}$. 设内切圆半径为 r，则 $r_3=\frac{r}{2}=\frac{1}{2}$.

$$r_1=r\cdot\frac{x}{3}=\frac{2}{5},\qquad r_2=r\cdot\frac{x}{4}=\frac{3}{10},$$

所以

$$r_1^2+r_2^2=r_3^2.$$

10. 设⊙O_1 切 CD 于 Q，则

$$PQ^2=\left(\frac{4}{2}+r_1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-r_1\right)^2=8r_1.$$

在以 OO_1 为斜边，直角边长为 PQ 的直角三角形中，

$$(1+r_1)^2=(5-r_1)^2-8r_1,$$

从而 $r_1=\frac{6}{5}$.

同样，由 $(r_2-1)^2=(5-r_2)^2-12r_2$ 得 $r_2=\frac{6}{5}$.

11. 显然 $DG=DH$，$IG=IH$，所以四边形 $AEIH$ 有内切圆. 同理其他三个四边形也有内切圆. 设 $AH=a$，$CG=c$，则 $\frac{r_1}{a}=\frac{r-r_1}{r}$，所以 $r_1=\frac{ar}{a+r}$. 同理 $r_3=\frac{cr}{c+r}$.

而由 $\angle IAH+\angle ICG=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，可知 $\triangle IAH\backsim\triangle IGC$，$r^2=ac$. 从而

$$\begin{aligned}r_1+r_3&=\frac{ar}{a+r}+\frac{cr}{c+r}\\&=\frac{ar}{a+r}+\frac{r^3}{r^2+ar}=r.\end{aligned}$$

同理 $r_2+r_4=r$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

12. $2\sqrt{CE \cdot AD}=CD$，所以

$$CE = 1, \quad BE = 3, \quad AE = 5,$$

$$r_2 = \frac{3+4-5}{2} = 1.$$

设 $HG \cap BC = P$，则 $\triangle PEG \cong \triangle AEB$.

$\odot O_1$ 平行于 AB 的切线距 AB 为 2，所以也与 $\odot O_2$ 相切，是这两个圆的内公切线. 它与外公切线 BC 垂直，所以外公切线 PH 也与内公切线 EG 垂直，而且 $EG=EB=3$.

因此，$AG=AE-EG=5-3=2$，$r_3=\frac{2}{3}r_2=\frac{2}{3}$.

13. 设 $AA'=l$，则在 $\triangle BC'C$ 中，由于 $\angle BC''C=120°$，所以 C' 到内切圆的切线长是 $\frac{r}{\sqrt{3}}$. 从而

$$l + (l - 2\sqrt{3}r) - \frac{2r}{\sqrt{3}} = 10. \qquad ①$$

又由余弦定理

$$l^2 + (l - 2\sqrt{3}r)^2 + l(l - 2\sqrt{3}r) = 100. \qquad ②$$

改记 $2\sqrt{3}r=x$，则由①得

$$l = 5 + \frac{2}{3}x. \qquad ③$$

代入②得

$$\left(5+\frac{2}{3}x\right)^2 + \left(5-\frac{1}{3}x\right)^2 + \left(5+\frac{2}{3}x\right)\left(5-\frac{1}{3}x\right) = 100,$$

即

$$\frac{1}{3}x^2 + 5x - 25 = 0.$$

$$x = \frac{-15+5\sqrt{21}}{2} \quad （只取正值），$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$r=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}.$$

14. 设切线构成四边形 $ABCD$，则 $\angle OAO_1=90°$，$\triangle ODO_1=90°$，O,A,O_1,D 四点共圆，所以 $\angle O_1OA=\angle O_1DA=\angle O_4DC$. 同理 $\angle OCO_4=90°$，$\angle O_4DC=\angle O_4OC$. 所以 $\triangle O_1OA\backsim\triangle O_4OC$，$\frac{O_1A}{O_4C}=\frac{OA}{OC}$. 同理 $\frac{O_2A}{O_3C}=\frac{OA}{OC}$.

易知 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{O_1A}{O_2A}$，$\frac{r_3}{r_4}=\frac{O_3C}{O_4C}$，从而 $r_1r_3=r_2r_4$.

15. 设 $OP=p$. 由余弦定理，

$$\cos\angle OPO_1=\frac{p^2+r_1^2-(r-r_1)^2}{2pr_1},$$

$$\cos\angle OPO_3=\frac{p^2+r_3^2-(r-r_3)^2}{2pr_3}.$$

因为 $$\angle OPO_1-\angle OPO_3=180°,$$

所以 $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{4r}{r^2-p^2}.$$

同理 $$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{4r}{r^2-p^2}.$$

16. 易知 P 为 AQ 中点. 过 P 作 AQ 的垂线交 CD 于 R，则 P,Q,C,R 共圆，$\angle PQR=\angle PCR=60°$. 从而这时 $\triangle AQR$ 是正三角形.

设 M,N 分别为 AB,CD 中点，则 $PN=5\sqrt{3}$，$PM=10-5\sqrt{3}$，$BQ=2(10-5\sqrt{3})$，$CQ=10\sqrt{3}-10$. 又 $RD=BQ$，所以 $CR=CQ=10\sqrt{3}-10$，$\angle TRC=45°$. $\angle RAD=45°+60°-90°=15°$，$\angle PDA=30°$，$\angle TCR=60°$.

已知三角形的边 a 及角 B,C，则内切圆

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$r=\frac{bc\sin(B+C)}{a+b+c}$$

$$=\frac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)+\sin B+\sin C}.$$

从而

$$r_1=\frac{10\sin15°\sin30°}{\sin30°+\sin15°+\sin135°}$$

$$=\frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}},$$

$$r_2=\frac{10(\sqrt{3}-1)\sin60°\sin45°}{\sin60°+\sin45°+\sin75°}$$

$$=\frac{10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2r_1.$$

17. 设过 A,B 并与$\odot O_3$相切的圆半径为 r. 易知 $AB=2\sqrt{r_1r_2}$. 设 $a=\sqrt{r_1r_2}$,则

$$(\sqrt{r^2-a^2}+r_3)^2+(a-2\sqrt{r_2r_3})^2=(r-r_3)^2,$$

所以 $$\sqrt{r^2-a^2}+r+2r_2=2a\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}.$$

而 $$\sqrt{r_1r_2}=\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3},$$

所以 $$2a\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}=2a\sqrt{r_2}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)$$

$$=2r_2+2\sqrt{r_1r_2}$$

$$=2r_2+2a.$$

于是 $$\sqrt{r^2-a^2}=2a-r.$$

解出 $r=\frac{5}{4}a$.

18. 设$\angle O_3OO_2=\alpha$, $\angle O_2OO_1=\beta$, $\angle O_1OO_3=\gamma$,则

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\alpha+\beta+\gamma=180°,$$

从而 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

由余弦定理，

$$\cos\alpha=\frac{(r-b)^2+(r-c)^2-(b+c)^2}{2(r-b)(r-c)},$$

等等. 代入上式并化简得

$$r^4-2(a+b+c)r^3+(a+b+c)^2r^2+16abcr-16abc(a+b+c)=0,$$

即

$$[r-(a+b+c)][r^3-(a+b+c)r^2+16abc]=0.$$

所以 $r=a+b+c$，从而 $OO_3=O_1O_2$，$OO_1=O_2O_3$，四边形 $OO_1O_2O_3$ 是平行四边形，$O_1O_2/\!/OO_3$.

19. 设$\odot O_2$ 分别切 AB、AC、BD、CE 于 E'，D'，M，N，则

$$\begin{aligned}AB-BF&=AE'+FM\\&=AD'+FN\\&=AC-CF,\end{aligned}$$

所以 $BC+AC-AB=BC+CF-BF$. 即$\odot O_2$ 与 BC 相切的点 L 也是$\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 的切点.

设 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r. 又设 $\angle ACB=2\gamma$，$\angle BAC=2\alpha$，$\angle FCA=2\phi$，则

$$\tan\gamma=\frac{r}{s-c},$$

$$\tan\phi=\frac{r_1}{b-r_1\cot\alpha}=\frac{r_1\tan\alpha}{b\tan\alpha-r_1}=\frac{r_1r}{br-r_1(s-a)}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$r_2 = (s-c)\tan(\gamma-\phi) = (s-c)\cdot\frac{\tan\gamma - \tan\phi}{1+\tan\gamma\tan\phi}$$

$$= (s-c)\left[\frac{r}{s-c} - \frac{r_1 r}{br - r_1(s-a)}\right] \bigg/$$

$$\left[1 + \frac{r}{s-c}\cdot\frac{r_1 r}{br - r_1(s-a)}\right]$$

$$= r(s-c)[br - r_1(s-a) - r_1(s-c)]/$$

$$\{r_1 r^2 + (s-c)[br - r_1(s-a)]\}$$

$$= rb(s-c)(r-r_1)/$$

$$\left[br(s-c) - r_1\cdot\frac{(s-a)(s-c)}{s}b\right]$$

$$= \frac{rs(r-r_1)}{rs - r_1(s-a)}$$

20. $r_1+r_2=5, r_2+r_3=4, r_3+r_1=3$. 所以，$r_1=2, r_2=3$，$r_3=1$. 由第 93 节笛卡儿的定理，

$$r = \frac{r_1 r_2 r_3}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3(r_1+r_2+r_3)} - (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)} = 6.$$

70. 五圆定理与四圆定理

设 P，Q 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的顺次两点.

1986 年，H. Demir 发现如下的五圆定理：

如果 $\triangle ABP$，$\triangle APQ$，$\triangle AQC$ 的内切圆都相等，那么 $\triangle ABQ$，$\triangle APC$ 的内切圆也相等(图 136).

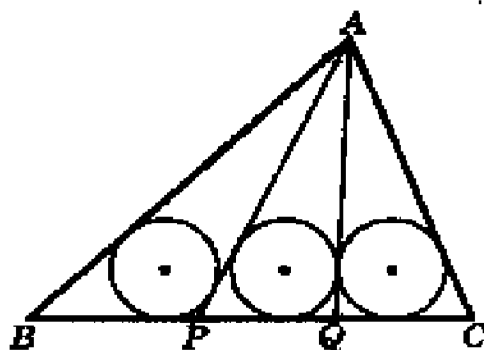


图 136

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

1990年，J. B. Tabov将五圆定理改进为四圆定理：

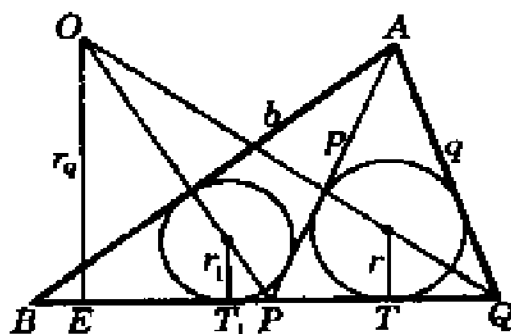


图 137

如果$\triangle ABP$，$\triangle AQC$的内切圆相等，那么$\triangle ABQ$，$\triangle APC$的内切圆也相等（图137）.

证明如下：设$AQ=q$，$AP=p$，$AB=b$，$PQ=x$，$BP=y$，$\triangle ABP$的内切圆半径为r_1，$\triangle APQ$的内切圆半径为r.

设$\angle AQP$的平分线与$\angle APB$的平分线相交于O，即O为$\triangle APQ$的旁心. 又设这旁切圆的半径为r_q，则有

$$\frac{r}{r_q}=\frac{QT}{QE}=\frac{q+x-p}{q+x+p},$$

$$\frac{r_1}{r_q}=\frac{PT_1}{PE}=\frac{p+y-b}{q+p-x}.$$

所以
$$\frac{r}{r_1}=\frac{(q+x-p)(q+p-x)}{(q+x+p)(p+y-b)}.$$

同理，设$\triangle AQC$的内切圆半径为r_2，$QC=z$，$AC=c$，则有

$$\frac{r}{r_2}=\frac{(p+x-q)(q+p-x)}{(q+x+p)(q+z-c)}.$$

所以$r=r_2$等价于

$$(x+q-p)(z+q-c)=(y+p-b)(x+p-q).$$

设$\triangle ABQ$，$\triangle APC$的内切圆半径分别为ρ_1，ρ_2，则同样有$\rho_1=\rho_2$等价于

$$(x+q-p)(p+x+z-c)=(x+p-q)(q+x+y-b).$$

因为

$$(x+q-p)(p+x+z-c)$$
$$=(x+q-p)(z+q-c)+(x+q-p)(x+p-q),$$
$$(x+p-q)(q+x+y-b)$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$=(x+p-q)(y+p-b)+(x+p-q)(q+x-p)$,

所以 $r_1=r_2$ 与 $\rho_1=\rho_2$ 等价.

71. 俄罗斯杀手

我国数学家吴文俊、张景中、杨路等研究机器证明，取得不少结果. 很多几何定理可以通过计算机获得证明.

有一次，俄罗斯提出一道几何题，他们认为用机器难以证明，杨路教授称之为"俄罗斯杀手".

题目如下：

设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 S，内角分别为 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$，边长分别为 l, m, n, k. 又记

$$p=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta,$$

$$q=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta,$$

$$t=\frac{l-m+n-k}{2}, \quad T=\frac{l+m+n+k}{2},$$

则

$$S=\frac{T^2}{q}-\frac{t^2}{p}. \qquad ①$$

这题当然也能用机器证明. 不过，我们也希望有一个纯几何的证明.

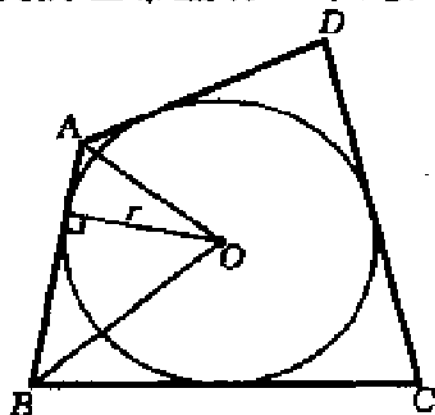


图 138

证明的困难在于给出的"数据"太多，反而难于措手.

先考虑简单的情况：如果四边形有内切圆，那么 $t=0$. 如图 138，设内切圆半径为 r，则

$$l=r(\cot\alpha+\cot\beta),$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

从而 $$T=\frac{1}{2}(l+m+n+k)=rq,$$

$$S=rT=\frac{T^2}{q}. \quad ②$$

即①对于圆外切四边形成立.

对于一般情况，如图 139，我们先作一个有内切圆的四边形，各边分别与四边形 $ABCD$ 的边平行（或重合）. 具体作时，可以利用原四边形的两条边 BA，BC. 即先作一个圆与 BA，BC 相切（圆心取在 $\angle ABC$ 的角平分线上），再作两条切线分别与 CD，DA 平行.

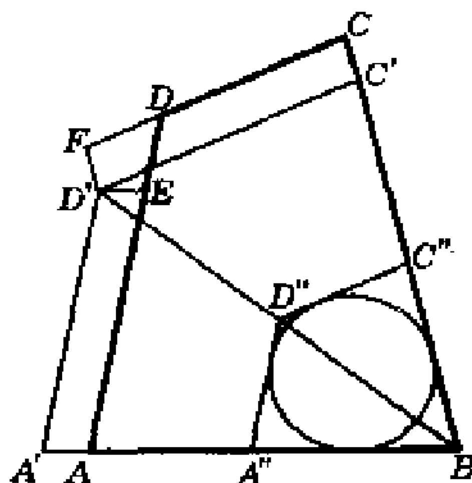


图 139

将所作的四边形 $A''BC''D''$ 放大，使它的周长变为 T. 设这个放大的四边形为 $A'BC'D'$.

过 D' 作 CD，DA 的平行线，分别交 DA，CD 于 E，F.

由上面所得的②，四边形 $A'BC'D'$ 的面积是 $\frac{T^2}{q}$. 因此，我们只需证明

四边形 $A'BC'D'$ 的面积减去 S，差是 $\frac{t^2}{p}$.

容易看出这差是

$$S_{A'AED'}+S_{D'EDF}-S_{D'C'CF}.$$

如果能够证明

$$S_{A'AED'}=S_{D'C'CF}, \quad ③$$

$$S_{D'EDF}=\frac{t^2}{p}, \quad ④$$

那么①就成立了.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

先来证④. 因为

$$D'E + DF - DE - D'F$$
$$= (A'B - AB) + (C'D' - CD) - (AD - A'D')$$
$$- (BC - BC')$$
$$= (A'B + BC' + C'D' + A'D')$$
$$- (AB + BC + CD + AD)$$
$$= T - T = 0,$$

所以四边形 $D'EDF$ 是圆外切四边形. 它的内角分别与 2α, 2β, 2γ, 2δ 互补, 周长是

$$D'E + DF + DE + D'F$$
$$= (A'B - AB) + (C'D' - CD) + (AD - A'D')$$
$$+ (BC - BC')$$
$$= (AD + BC - AB - CD)$$
$$+ (A'B + C'D' - A'D' - BC')$$
$$= AD + BC - AB - CD$$
$$= -2t.$$

于是由②, ④式成立.

再来证③. 两个四边形都是平行四边形.

$$S_{A'AED'} = A'D' \times D'E \times \sin 2\alpha.$$

由一开始对圆外切四边形的讨论,

$$A'D' = \frac{T}{q}(\cot\alpha + \cot\delta),$$

$$D'E = \frac{t}{p}(\tan\beta + \tan\alpha).$$

所以

$$S_{A'AED'} = \frac{Tt}{pq}(\cot\alpha + \cot\delta)(\tan\beta + \tan\alpha)\sin 2\alpha$$

$$= \frac{2Tt}{pq} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta\cos\beta}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

同理

$$S_{D'C'CF}=\frac{2Tt}{pq}\cdot\frac{\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta\cos\beta}.$$

由于 $\alpha+\beta=180^\circ-(\gamma+\delta)$，$\alpha+\delta=180^\circ-(\gamma+\beta)$，所以

$$S_{A'AED'}=S_{D'C'CF}.$$

至此，俄罗斯杀手已被我们擒获.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（七）逍 遥 自 在

72. 一道波兰竞赛题

爱解题的人，觉得解题是一种愉快，极大的愉快.

自本节至80节，介绍的都是国外的竞赛题.

在锐角三角形 ABC 中，$\angle ACB=2\angle ABC$. 点 D 是边 BC 上一点，使得 $2\angle BAD=\angle ABC$. 证明：

$$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}. \qquad ①$$

这是1999年～2000年波兰数学奥林匹克的试题.

由已知条件，将 $\angle BAD$，$\angle ABC$ 两倍，便可产生有两个角相等的等腰三角形. 因此，应当在 DC 上取 E，使 $\angle EAD=\angle BAD$（图140）. 辅助线添好，问题也就不难解决了.

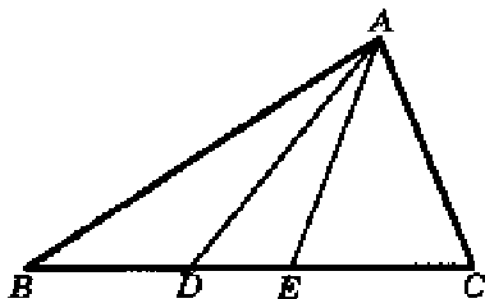


图 140

设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle BAE=2\alpha=\angle ABC$. 所以，$AE=BE$.

又 $\angle AEC=\angle BAE+\angle ABC=2\angle ABC=\angle ACB$，所以 $AE=AC$.

在 $\triangle ABE$ 中，因为 AD 是角平分线，所以

$$\frac{BD}{DE}=\frac{AB}{AE}, \qquad ②$$

即

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{BD}{AC-BD}=\frac{AB}{AC}. \qquad ③$$

③中只有三个在①中出现的量：BD，AB，AC. 将③变形即得到①.

73. 直角三角形内一点

点 X 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（$\angle C=90°$）内部或边界上一点. 点 P，Q，R 分别是 X 在边 BC，CA，AB 上的垂足. 证明：

$$AR\cdot RB=BP\cdot PC+AQ\cdot QC. \qquad ①$$

的充要条件是点 X 在边 AB 上.

我们先证较容易的充分性.

如图 141，点 $X=R$. 要证①式成立.

易知 $\frac{BP}{RB}=\frac{PC}{AR}=\sin A$，$\frac{AQ}{AR}=\frac{QC}{RB}=\cos A$，所以

$$\frac{BP\cdot PC}{AR\cdot RB}+\frac{AQ\cdot QC}{AR\cdot RB}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

即①成立.

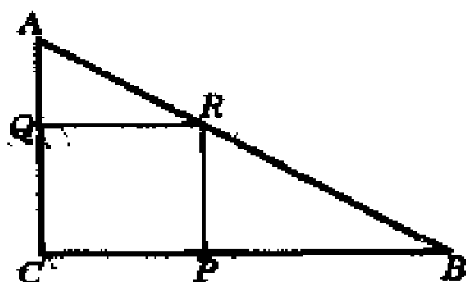


图 141

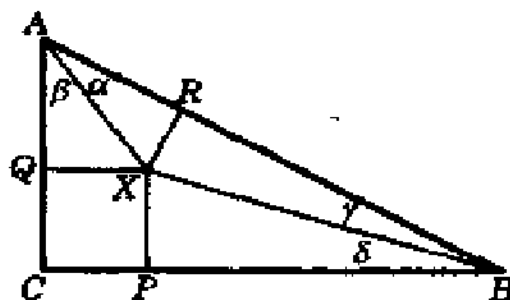


图 142

再证必要性. 如图 142，设①成立.

沿着前面的思路，仍然利用三角函数，我们有

$$\frac{BP}{RB}=\frac{BX\cos\delta}{BX\cos\gamma}=\frac{\cos\delta}{\cos\gamma},\quad \frac{PC}{AR}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\frac{AQ}{AR}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\ \frac{QC}{RB}=\frac{\sin\delta}{\cos\gamma},$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{BP\cdot PC}{AR\cdot RB}+\frac{AQ\cdot QC}{AR\cdot RB}\\=&\frac{\cos\delta\sin\beta+\cos\beta\sin\delta}{\cos\alpha\cos\gamma}\\=&\frac{\sin(\beta+\delta)}{\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma}\\=&\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=1-\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}.\end{aligned}$$

从而 α 或 γ 为 0，即 $X=R$.

不难看出，充分性的证明可以并入必要性的证明中.

另一种解法是利用勾股定理：

$$(AR+RB)^2=(AQ+QC)^2+(BP+PC)^2,$$

即

$$\begin{aligned}&AR^2+RB^2+2AR\cdot RB\\=&AQ^2+PC^2+QC^2+BP^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC)\\=&AX^2+XB^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC).\\\geqslant&AR^2+RB^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC).\end{aligned}$$

于是，当且仅当 X 在 AB 上(即 $AX=AR$，$XB=RB$)时，①式成立.

本题也是 1999 年～2000 年的波兰数学奥林匹克试题.

74. 平　方　和

A，B，C 三点不共线. 证明平面 ABC 上存在一个唯一的点 X，满足

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$XA^2+XB^2+AB^2=XB^2+XC^2+BC^2$$
$$=XC^2+XA^2+CA^2.$$

平方和或平方差使人想到垂直关系. 设三条高为 AD, BE, CF, 垂心为 H, 则

$$HA^2-HC^2=AB^2-BC^2=AE^2-EC^2,$$
$$HB^2-HA^2=BC^2-CA^2=BF^2-AF^2.$$

这与 X 所应满足的等式已很接近, 只差一负号.

在 AB, AC 上分别取 F_1, E_1, 使

$$AF_1=BF,\ AE_1=CE.$$

过 E_1, F_1 分别作 AC, AB 的垂线, 相交于 X(图 143), 则

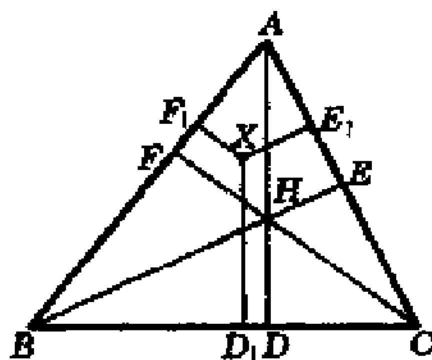


图 143

$$XA^2-XC^2=AE_1^2-CE_1^2=EC^2-AE^2=BC^2-AB^2,$$
$$XB^2-XA^2=BF_1^2-AF_1^2=AF^2-BF^2=CA^2-BC^2.$$

即点 X 满足要求.

另一方面, 满足要求的点 X 使

$$XA^2-XC^2=BC^2-AB^2=EC^2-AE^2=AE_1^2-CE_1^2,$$

所以 X 在 AC 的过 E_1 点的垂线上. 同理 X 在 AB 的过 F_1 点的垂线上. 所以 X 是这两条垂线的交点, 它是唯一的.

注: 在 BC 上取 D_1, 使 $BD_1=CD$, 则 X 也在 BC 的过 D_1 点的垂线上. 在近世几何中, 点 X 称为$\triangle ABC$ 的类似垂心.

75. 六点共圆

已知锐角三角形 ABC, 在边 BC 上取点 A_1, A_2(A_2 在 A_1 与 C 之间), 边 AC 上取点 B_1, B_2(B_2 在 B_1 与 A 之间), 边 AB

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

上取点 C_1,C_2(C_2 在 C_1 与 B 之间)，使得

$$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1.$$

直线 AA_1，BB_1，CC_1 围成一个三角形，AA_2，BB_2，CC_2 围成另一个三角形. 证明这两个三角形的六个顶点在同一个圆上.

本题宜先作一个较为准确的图. 在作图过程中可以发现一些性质，其中有些对解决本题有帮助.

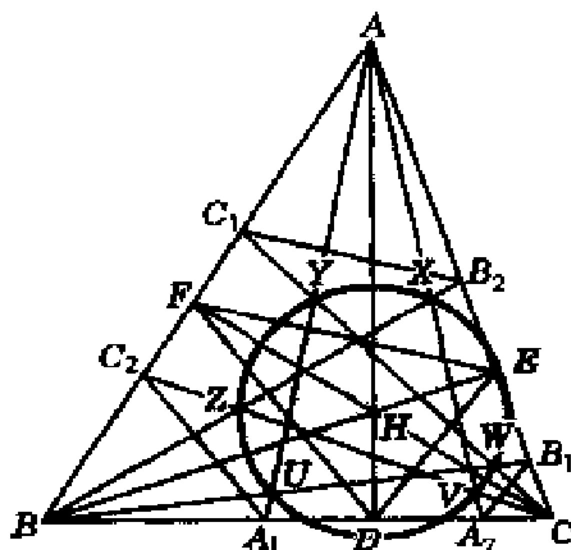


图 144

A_1 可以任取(当然应在高 AD 左侧)，A_2 应满足 $AA_2=AA_1$，即 A_1,A_2 关于高 AD 对称. A_2,B_1,A,B 四点共圆，我们称 A_2B_1(关于 CA,CB)与 AB 逆平行. 熟知高 BE，AD 的垂足 E,D 的连线 DE 也与 AB 逆平行，从而 $A_2B_1/\!/DE$. 于是过 A_2 作 DE 的平行线就可得到 B_1. 再关于 BE 对称，由 B_1 得到 B_2. 同样可作出 C_1,C_2(图 144).

作图完成后，要证图中 X,Y,Z,U,V,W 六点共圆. 证六点共圆的办法通常是找出一点与这六点距离相等. 这一点即圆心，它应与六点有关而且位置较为特殊. 从图中以及上述作图可以猜想这一点就是$\triangle ABC$ 的垂心 H.

事实上，易知(尽量利用四点共圆)

$$AX\cdot AA_2=AB_2\cdot AC=AC_1\cdot AB=AY\cdot AA_1,$$

从而 $AX=AY$，即 X,Y 关于等腰三角形 AA_1A_2 的高 AD 对称. 所以 $HX=HY$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

同理，$HY=HZ=HU=HV=HW=HX$. 所以 X,Y,Z，U,V,W 都在以 H 为圆心的同一个圆上.

又解：$\angle A_1AD=90°-\angle AA_1A_2=90°-\angle BB_1B_2=\angle EBB_1$，所以 H,A,B,U 四点共圆. 同理，H,A,C,V 四点共圆. 并且，两圆的公共弦 AH 在两圆中所对圆周角$\angle HBA=\angle HCA$，所以这两个圆相等. 弦 HU 所对圆周角为$\angle HAU$，弦 HV 所对圆周角为$\angle HAV$，$\angle HAU=\angle HAV$，所以 $HU=HV$. 同理可证 $HV=HW=HX=HY=HZ$.

三解：在又解中得到 H，A，B，U 四点共圆. 由于 $\angle BHA=180°-\angle C$，所以这个圆的直径 $\frac{AB}{\sin\angle BHA}=\frac{AB}{\sin C}$，即与$\triangle ABC$ 的外接圆一样大.

设$\triangle ABC$ 的半径为 R，$\angle AA_1A_2=\alpha$，则

$$\angle A_1AH=90°-\alpha,$$

$$HU=2R\sin(90°-\alpha)=R\cos\alpha.$$

同理，H 到 V，W，X，Y，Z 的距离也都是 $R\cos\alpha$，所以 U，V，W，X，Y，Z 六点在以 H 为圆心，$R\cos\alpha$ 为半径的圆上.

76. 三线共点与三点共线

已知$\triangle ABC$. 一圆过 B,C，再分别交边 AB,AC 于 C'，B'；而 H,H' 分别为$\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$ 的垂心. 证明 BB'，CC'，HH' 共点.

如图 145，设$\triangle ABC$ 的高为 BE，CF，$\triangle AB'C'$的高为 $B'E'$，$C'F'$. 又设 $B'C'$，BC 相交于 G；$H'B'$，HB 相交于 I；$H'C'$，HC 相交于 J.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

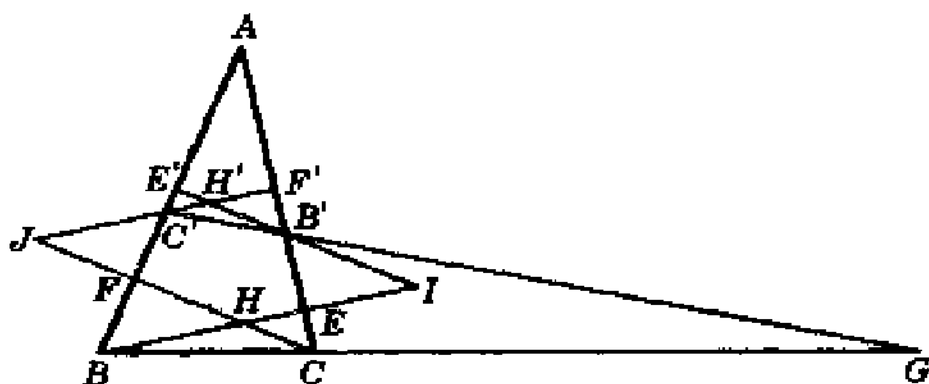


图 145

由笛沙格定理，要证$\triangle HBC$与$\triangle H'B'C'$的对应顶点的连线BB',CC',HH'共点，只需证明对应边的交点I,J,G共线.

因为B,C,B',C'共圆，所以

$$GC \cdot GB = GB' \cdot GC'. \quad ①$$

熟知B,C,E,F共圆；B',C',E',F'共圆. ①表明G对于这两个圆的幂相等，所以G在这两个圆的根轴l上.

因为$\angle BEB' + \angle B'E'B = 90° + 90° = 180°$，所以$B,E,B',E'$四点共圆，从而$IE \cdot IB = IB' \cdot IE'$. I也在上一段所说的两个圆的根轴l上.

同理J也在l上. 因此I,J,G共线，BB',CC',HH'共点.

77. 比

如图 146，已知圆内接四边形$ABCD$，E，F分别在边AB、CD上变动，满足$AE : EB = CF : FD$. P在线段EF上，使得$PE : PF = AB : CD$.

求证：$S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC}$不依赖于$E,F$的选择.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

本题有很多比. 我们有一个常用的、关于定比分点的引理：

设 P 分线段 EF 为 $m:n$，E，F 到直线 l 的距离分别为 d_E，d_F，则 P 到 l 的距离

$$d_P=\frac{nd_E+md_F}{m+n}. \qquad ①$$

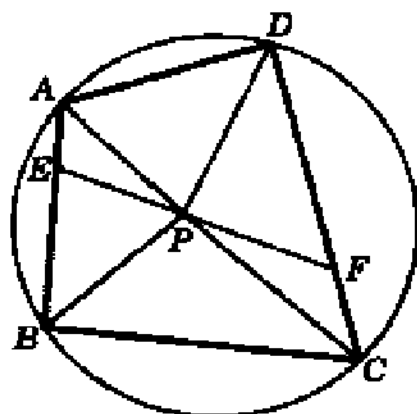


图 146

引理很容易证明，而且不少书（包括教科书）都有，所以我们不加证明，留给读者自行验证. 但要注意①的分子是 nd_E+md_F，而不是 md_E+nd_F.

设 $AE:EB=CF:FD=\lambda$，则取 AD 作为直线 l，我们有

$$P\text{ 到 }AD\text{ 的距离}=\frac{CD\times d_E+AB\times d_F}{AB+CD}$$

$$=\frac{CD\times AE\sin A+AB\times DF\sin D}{AB+CD}$$

$$=\frac{CD\times AB\times\frac{1}{1+\lambda}\sin A+AB\times CD\times\frac{\lambda}{1+\lambda}\sin D}{AB+CD}$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\sin A+\lambda\sin D).$$

同理，

$$P\text{ 到 }BC\text{ 的距离}$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\lambda\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\lambda\sin D+\sin A).$$

所以 P 到 AD 的距离与 P 到 BC 的距离相等，

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{AD}{BC},$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

与 E,F 的选择无关.

78. 何时 $OH=2R$?

$\triangle ABC$ 中,H 为垂心,O 为外心,R 为外接圆半径. D,E,F 分别为 A,B,C 关于对边的对称点.

求证:当且仅当 $OH=2R$ 时,D,E,F 三点共线.

如图 147,过 A, B, C 分别作对边的平行线,组成 $\triangle A'B'C'$. 在第 23 节已经说过 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别是 $\triangle ABC$ 对应边长的 2 倍. $\triangle A'B'C'$ 的外心就是 $\triangle ABC$ 的垂心 H,而且 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径是 $2R$.

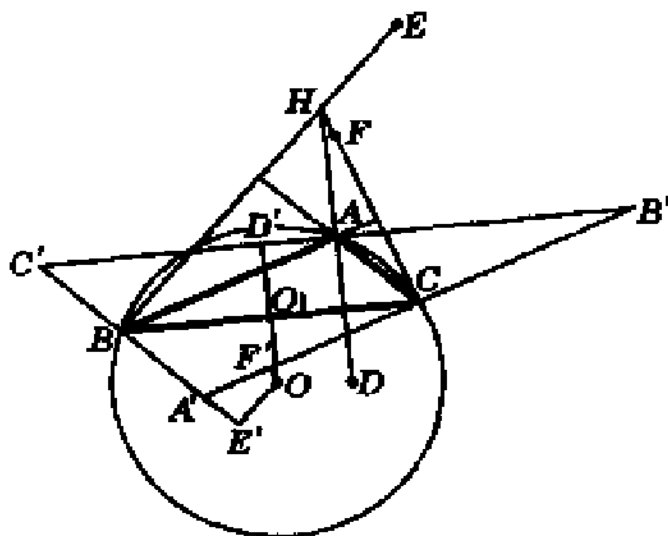


图 147

于是当且仅当 $OH=2R$ 时,O 在 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆上.

设 O 到 $\triangle A'B'C'$ 的三边所引垂线的垂足分别为 D',E',F',则由西摩松定理:

当且仅当 $OH=2R$ 时,D',E',F' 共线.

注意 $OD'\parallel HD$,并且(O_1 为 OD' 与 BC 的交点)

$$OD'=OO_1+O_1D'=\frac{1}{2}HA+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}HD,$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

等等，所以将 O 平移到 H，然后绕 H 旋转 $180°$，再放大至 2 倍，则 D',E',F' 分别与 D,E,F 重合.

因此当且仅当 $OH=2R$ 时，D,E,F 三点共线.

79. 直线与圆相切

如图 148，两个圆 Γ_1,Γ_2 在圆 Γ 内，分别与圆 Γ 内切于两个不同的点 M,N. 并且 Γ_1 过 Γ_2 的圆心. 过 Γ_1,Γ_2 的两个交点的直线交 Γ 于 A,B. 直线 MA,MB 分别与 Γ_1 相交于 C,D.

求证：CD 与 Γ_2 相切.

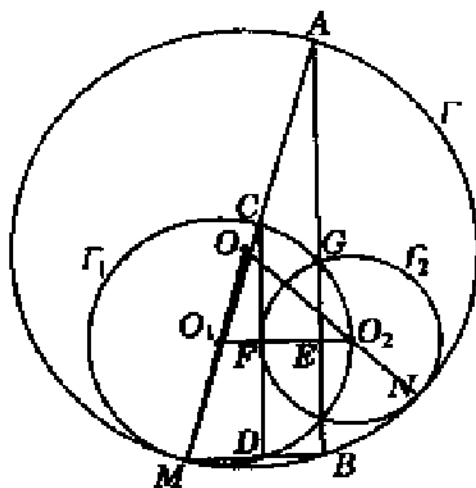


图 148

首先证明 $CD/\!/AB$. 最简单的证法是以 M 为位似中心，将 Γ_1 变为 Γ(因为这两圆相切，所以圆心 O_1,O 与 M 共线). 这时 CD 变为 AB. 所以 $CD/\!/AB$.(不熟悉位似变换的人也可以过 M 作 Γ_1 与 Γ 的公切线. 利用角的相等证明两线平行.)

设 Γ_2 的圆心为 O_2，则 $O_1O_2\perp AB$. 因而 $O_1O_2\perp CD$. 设 O_1O_2 与 CD 相交于 F，与 AB 相交于 E. 只需证 $O_2F=r_2$，这里 r_2 是 r_2 的半径.

设 Γ, Γ_1 的半径分别为 R, r_1. 因为 Γ_1 过 O_2, 只需证 $O_1F=r_1-r_2$. 而由上而所说的位似，只需证 O 到 AB 的距离是：

$$\frac{R}{r_1}(r_1-r_2)=R-\frac{Rr_2}{r_1}. \qquad ①$$

设 G 为 Γ_1,Γ_2 的一个交点，因为 $O_1G=r_1$，$O_2G=r_2$，所以

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$O_1E^2-O_2E^2=r_1^2-r_2^2.$$

而

$$O_1E^2-O_2E^2=r_1(O_1E-O_2E)=r_1(r_1-2\times O_2E),$$

所以

$$r_1-2\times O_2E=\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1}. \qquad ②$$

同样，由$\triangle OO_1O_2$可得

$$r_1-2\times O_2H=\frac{(R-r_1)^2-(R-r_2)^2}{r_1}, \qquad ③$$

其中H是O在O_1O_2上的射影.

②减去③得

$$2(O_2H-O_2E)=\frac{2R}{r_1}(r_1-r_2),$$

即①成立. 证毕.

80. 圆内接四边形对边之差

如图 149，在圆内接四边形$ABCD$中，证明：

$$|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant|AC-BD|. \qquad ①$$

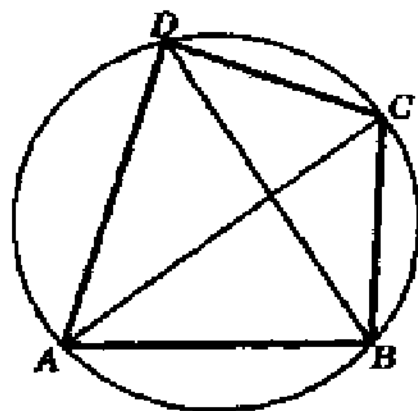


图 149

本题必须有"圆内接四边形"这一条件，否则结论不成立. 例如平行四边形$ABCD$中，对边相等，所以①式左边为 0. 只要对角线不等($ABCD$不是矩形)，①就不成立.

上面的反例，实际上也引出我们的证法：圆内接四边形，如果有两条边平行，那么它的对角线必须相

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

等.因此,可以过 A 作 BC 的平行弦 AD',产生一个等腰梯形(图 150).然后再考虑

$$AD'-BC(<AD-BC),\ CD'-CD(=AB-CD)$$

的和与

$$BD'-BD(=AC-BD)$$

的大小.

不妨设 B,C 在弦 DD' 的中垂线的同侧,我们证明更强的结论:

$$CD'-CD>BD'-BD. \quad ①$$

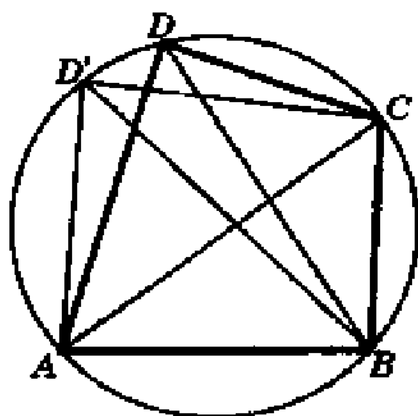


图 150

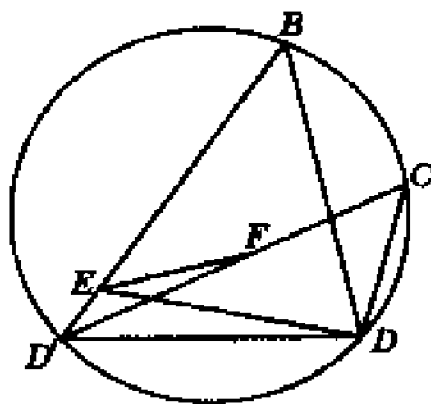


图 151

为了看得清楚一些,我们重画一个图(图 151),使与①有关的线段画得长一些.

在 BD' 上取 E,使 $BE=BD$.在 CD' 上取 F,使 $CF=CD$.因为

$$\angle D'EF>\angle D'ED=90°+\frac{1}{2}\angle EBD>90°,$$

所以

$$D'F>D'E,$$

即①成立.

两点补充:

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

1. 在上面的证明中，我们（不失一般性）设 $AB>CD$，$AD>BC$，$\overset{\frown}{AD}>\overset{\frown}{AB}$. 若$\overset{\frown}{AD}$是劣弧，则在$\overset{\frown}{AD}$上取 D'，使$\overset{\frown}{CD'}=\overset{\frown}{AB}$（即图 150 中作 $AD'\parallel BC$）. 若$\overset{\frown}{AD}$是优弧，则改在$\overset{\frown}{AB}$上取 B'，使$\overset{\frown}{AB'}=\overset{\frown}{DC}$（即作 $CB'\parallel AD$），证明基本相同（字母略作更动）.

2. 图 151 中，以 D,D' 为焦点的各双曲线，逐步"离开" DD' 的中垂线. 过 B 的双曲线，夹在中垂线与过 A 的双曲线（或过 C 的双曲线）之间，因面

$$|BD'-BD|<\max(|CD'-CD|,\ |AD'-AD|).$$

注：本题是 1999 年美国数学奥林匹克试题.

81. 等角共轭点

M,N 两点在$\triangle ABC$ 内，使

$$\angle MAB=\angle NAC,\ \angle MBA=\angle NBC. \quad ①$$

证明：

$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1. \quad ②$$

满足①式的点 M,N 称为$\triangle ABC$ 的等角共轭点. 对于这样一对点 M,N，必有

$$\angle MCB=\angle NCA. \quad ③$$

但我们并不假定③已经成立. 相反地，在我们解题的过程中将顺便证明③式成立.

我们利用对称.

设 M 关于 AB,BC,CA 的对称点分别为 M_1,M_2,M_3. 连接 $AM_1,BM_1,BM_2,CM_2,CM_3,AM_3,NM_1,NM_2,NM_3$（图 152）.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

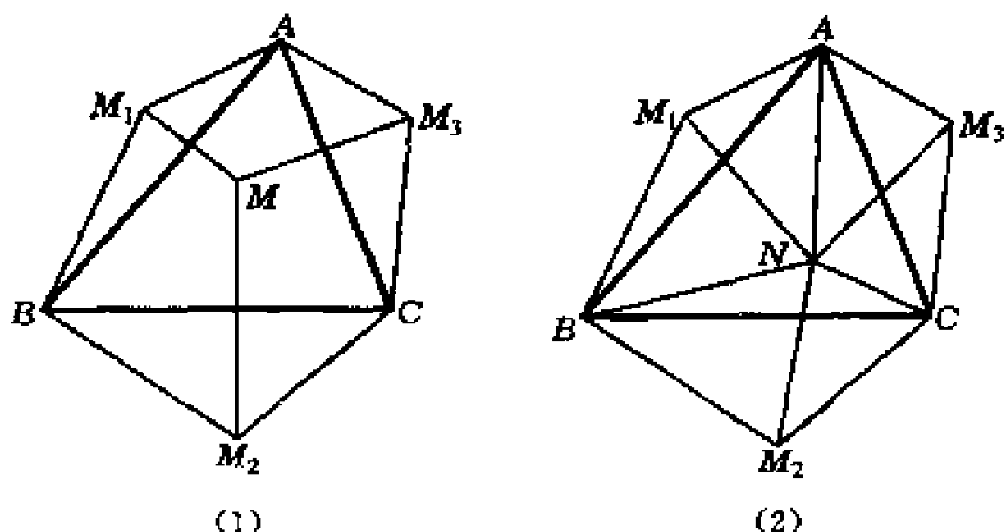


图 152

$\angle NAM_3=\angle NAC+\angle CAM_3=\angle MAB+\angle MAC=\angle BAC$. 同理$\angle NAM_1=\angle BAC=\angle NAM_3$. 又 $AM_1=AM=AM_3$，所以$\triangle NAM_1\cong\triangle NAM_3$，$NM_3=NM_1$.

同理$\triangle NBM_1\cong\triangle NBM_2$，$NM_1=NM_2$. 所以 $NM_2=NM_3$.

又 $CM_2=CM=CM_3$，所以$\triangle NCM_2\cong\triangle NCM_3$. $\angle M_2CN=\angle M_3CN=\dfrac{1}{2}\angle M_2CM_3=\angle BCM+MCA=\angle BCA$. 从而$\angle BCN=\angle M_2CN-\angle M_2CB=\angle BCA-\angle BCM=\angle MCA$，即③成立.

又 $S_{AM_1BM_2CM_3}=2S_{\triangle ABC}$，即

$$\frac{AM_1\times AN\times\sin\angle BAC}{2S_{\triangle ABC}}+\frac{BM_1\times BN\times\sin\angle ABC}{2S_{\triangle ABC}}+\frac{CM_2\times CN\times\sin\angle ACB}{2S_{\triangle ABC}}=1.$$

由于 $2S_{\triangle ABC}=AB\times AC\times\sin\angle BAC=BA\times BC\times\sin\angle ABC=CA\times CB\times\sin\angle BCA$，所以上式导出②.

通常③用塞瓦定理来证明. 这里的证法似未在其他地方

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

见过.

82. 凸六边形

设凸六边形 $ABCDEF$ 中，

$$\angle B+\angle D+\angle F=360^\circ,$$

并且

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1. \quad ①$$

求证：

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DB}=1. \quad ②$$

已知与求证均出现了线段的比，所以肯定要利用相似三角形. 做法有的像第 17 节，只不过相似代替了全等.

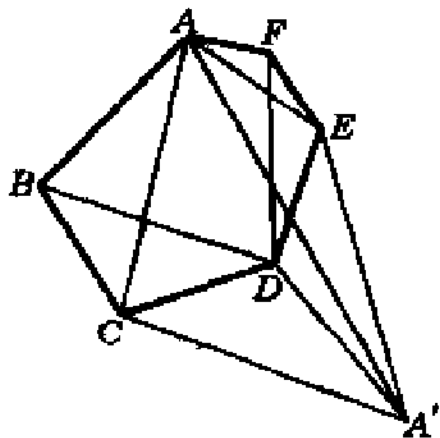


图 153

如图 153，以 CD 为一边作 $\triangle CDA'\backsim\triangle CBA$（即将 $\triangle CBA$ 绕 C 旋转，使 CB 边落到 CD 上，再以 C 为中心，作位似变换，使得 B 与 D 重合. 这时 A 变成 A'），则

$$\frac{CD}{A'D}=\frac{CB}{AB}=\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA},$$

从而

$$\frac{DE}{A'D}=\frac{EF}{FA}.$$

由已知易得

$$\begin{aligned}\angle A'DE&=360^\circ-\angle CDE-\angle CDA'\\&=360^\circ-\angle CDE-\angle CBA=\angle EFA,\end{aligned}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

所以

$$\triangle EFA \backsim \triangle EDA'.$$

可以看成将$\triangle EFA$绕 E 旋转，再以 E 为中心作位似变换，变成$\triangle EDA'$.

由此易得$\angle FED=\angle AEA'$，$\frac{EF}{ED}=\frac{EA}{EA'}$，所以

$$\triangle EFD \backsim \triangle EAA',$$

$$\frac{FD}{AA'}=\frac{FE}{AE}. \quad ③$$

类似地，$\triangle CBD \backsim \triangle CAA'$，

$$\frac{DB}{A'A}=\frac{BC}{AC}. \quad ④$$

③除以④即得②.

83. 直线与圆相切

直线与圆相切时，弦切角与直线夹的弧所对的圆周角相等. 反过来，如图 154，当$\angle DBC=\angle A$ 时，BD 与$\odot BAC$ 相切. 下题即用到这一结论.

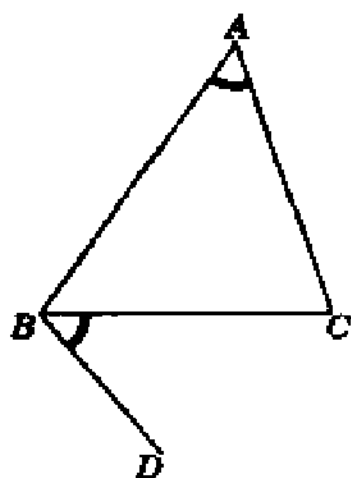


图 154

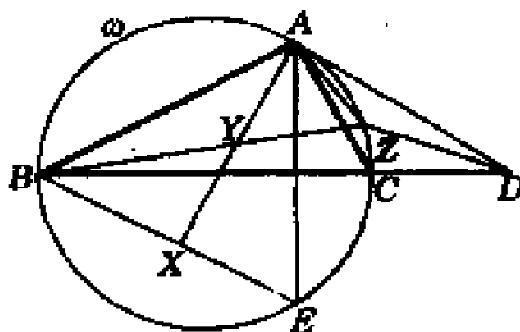


图 155

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

已知$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B<\angle C$. 外接圆ω在A处的切线交直线BC于D. 设E为A关于BC的对称点，X为A到BE的垂足，Y为AX的中点，直线BY又交ω于Z. 证明直线BD与$\triangle ADZ$的外接圆相切(图 155).

我们要证$\angle ZDB=\angle ZAD$，而$\angle ZAD=\angle ZEA$，所以应有

$$\angle ZDB=\angle ZEA\ . \qquad ①$$

反过来，如果能证明①成立，那么结论也就得出了.

如图 156，设BD与AE相交于F，则F是AE的中点，①即Z,F、E、D四点共圆. 这四点共圆当然不能用①来证(而是由四点共圆导出①)，所以应考虑其他角之间的关系. 例如

$$\angle EZF=\angle EDF. \qquad ②$$

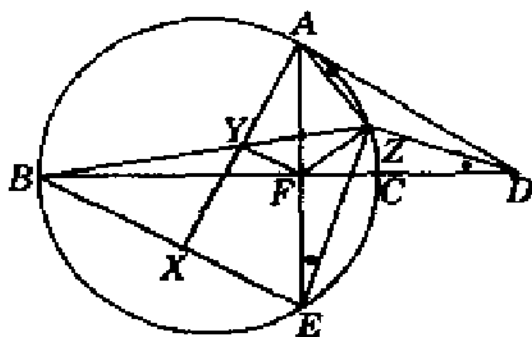


图 156

②的右边是一个比较容易用已知角表示的角：设$\angle ABC=\beta$，则$\angle EBD=\beta$，

$$\angle EDF=90°-\angle FED=90°-2p.$$

而$\angle EZF$也有种种条件可以利用，有希望算出(如果证$\angle EZD=\angle EFD=90°$，那么计算$\angle EZD$涉及$D$点，难于解决，似乎兜了一个圈子还要去算未知的$\angle ZDF$. 现在算$\angle EZF$，已与$D$无关，这是一个大好的兆头).

事实上，$YF /\!/ XE$，所以

$$\angle YFA=\angle BEA=\angle BZA,$$

$$A,Y,F,Z\text{ 四点共圆.}$$

从而

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\angle EZF=\angle EZB-\angle BZF$$
$$=\angle EAB-\angle EAX$$
$$=\angle BAX$$
$$=90^\circ-2\beta.$$

于是②成立.证毕.

证明中,由 $YF /\!/ XE$ 及 A,B,E,Z 四点共圆导出 A,Y,F,Z 四点共圆,也是常用的手法,希望读者能够注意.

84. 三个四边形的面积

如图 157,O 是面积为 S 的凸四边形 $ABCD$ 内一点.K,L,M,N 分别是边 AB,BC,CD,DA 的内点.若 $OKBL,OMDN$ 是平行四边形,S_1,S_2 分别为四边形 $ONAK,OMCL$ 的面积.证明:

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}.$$

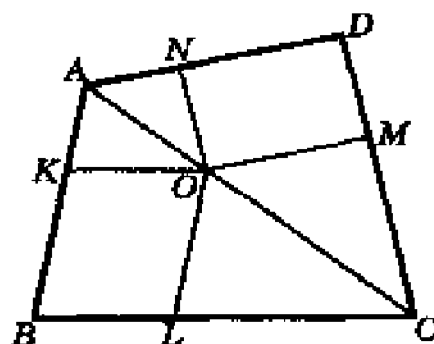


图 157

如果 O 在对角线 AC 上,那么

$$S_{\triangle OAN}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ACD},$$

$$S_{\triangle KOA}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ABC}.$$

相加得

$$S_1=\frac{AO^2}{AC^2}S,$$

即

$$\sqrt{S_1}=\frac{AO}{AC}\sqrt{S}.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

同理

$$\sqrt{S_2}=\frac{OC}{AC}\sqrt{S}.$$

所以

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}.$$

对于一般情况，过 O 作 BD 的平行线交 AC 于 O'. 关于 O'，设相应的四边形为 $O'N'AK'$，$O'M'CL'$（图 158），面积为 S'_1，S'_2，则

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S'_1}+\sqrt{S'_2}.$$

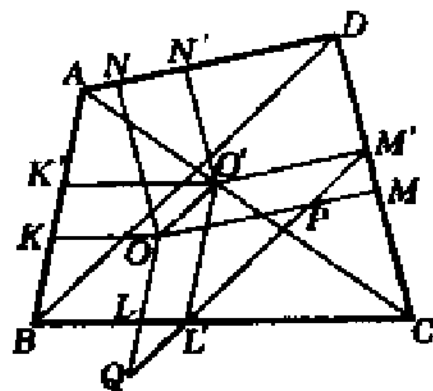


图 158

连接 $L'M'$，交 OM 于 P. $M'L'$ 与 OL 的延长线相交于 Q. 由 $O'L'\parallel AB$，$O'M'\parallel AD$ 得 $\frac{CL'}{CB}=\frac{CO'}{CA}=\frac{CM'}{CD}$，所以 $L'M'\parallel BD$，从而

$$S_{OO'M'M}\geqslant S_{OO'M'P}=S_{OO'L'Q}\geqslant S_{OO'L'L},$$

即

$$S'_2\geqslant S_2.$$

同理

$$S'_1\geqslant S_1.$$

所以

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}.$$

85. 俄罗斯竞赛题(一)

下面介绍 2000 年俄罗斯数学奥林匹克中的几何题.

1. 如图 159，设锐角三角形 ABC 的外心为 O，$\triangle AOC$ 的外心为 K. $\odot K$ 分别与 AB，AC 再交于 M，N. K 关于 MN 的对称点为 L.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

求证：　$AL\perp BC$.

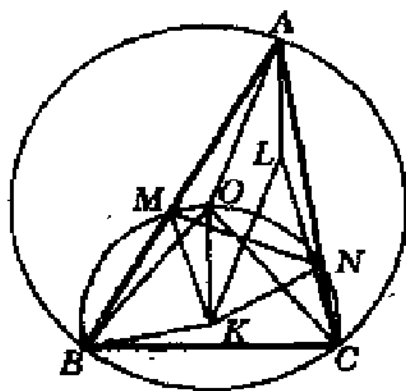


图　159

只需证明 $AL/\!/OK$. 为此，我们证明四边形 $OKLA$ 是平行四边形. 因为 $\angle OAB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle AOB=90^\circ-\angle C=90^\circ-\angle AMN$，所以 $OA\perp MN$，从而 $OA/\!/KL$.

只需再证 $KL=OA$. 为此注意 $\triangle NKL$ 与 $\triangle KOB$，它们的边 $NK=NL=KO=KB$. 又

$$\angle KOB=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC,$$

对于 $\odot K$ 的弧，$\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{MN}$ 的 $\frac{1}{2}$ 是 $\angle BAC$ 的度数，而 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数即 $\angle BKC=2\angle BOC=4\angle BAC$ 的度数，所以 $\overset{\frown}{MN}$ 的度数即

$$4\angle BAC-2\angle BAC=2\angle BAC,$$

从而 $\angle LKN=\frac{1}{2}\angle MKN=\angle BAC=\angle KOB$. 于是

$$\triangle NKL\cong\triangle KOB,\ KL=OB=OA.$$

$$AL\perp BC.$$

2. 如图 160，在 $\triangle ABC$ 的中线 CD 上任取一点 E. 圆 S_1 过 E，并且与 AB 相切于 A；圆 S_2 过 E，并且与 AB 相切于 B；圆 S_1，S_2 分别交 AC，BC 于 M，N. 求证 $\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_1，S_2 都相切.

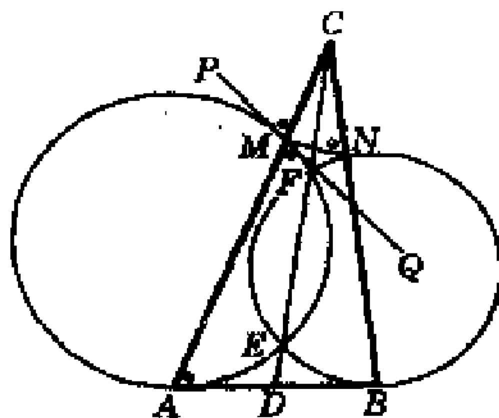


图　160

D 到圆 S_1，S_2 的切线长 $DA=DB$，所以 D 在这两个圆的

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

根轴上．而两圆的交点 E 也在根轴上，所以 CD 就是两个圆的根轴．从而

$$CM\times CA=CN\times CB,$$

M,N,B,A 四点共圆．

过 M 作圆 S_1 的切线 PQ，则

$$\angle PMC=\angle AMQ=\angle MAB=\angle CNM,$$

所以 PQ 也与 $\triangle CMN$ 的外接圆相切于 M，从而 $\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_1 相切于点 M.

同理，$\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_2 相切于点 N.

以上两题都是九年级的赛题.

86. 俄罗斯竞赛题(二)

以下两道题是十年级的，最后一道题是十一年级的赛题.

1. 如图 161，在锐角三角形 ABC 中，高 AA_1 与 CC_1 所夹的锐角的平分线分别交 BA，BC 于 P,Q. 垂心 H 与 AC 中点 M 的连线与 $\angle ABC$ 的平分线相交于 R.

求证：P,B,Q,R 四点共圆.

由于 $\angle C_1HP=\angle CHQ=\angle A_1HQ$，所以 $\angle C_1PH=\angle A_1QH$，$BP=BQ$.

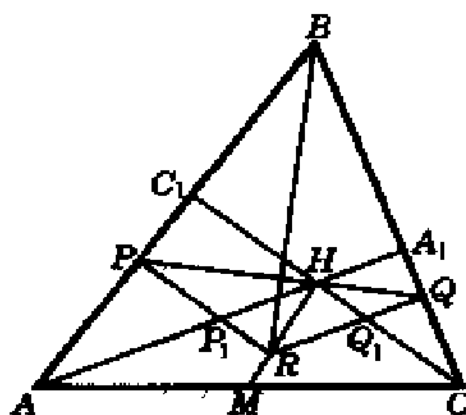


图 161

设 $\triangle BPQ$ 的外接圆与 $\angle ABC$ 的平分线相交于 R'，则 BR' 是外接圆的直径，$R'P\perp BP$，$R'Q\perp BQ$. 所以 $R'P\parallel CC_1$，$R'Q\parallel AA_1$.

设 $R'P$，$R'Q$ 分别交 HA，HC 于 P_1，Q_1，则四边形

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$HP_1R'Q_1$ 是平行四边形. 因此 HR' 平分 P_1Q_1.

因为 $R'P /\!/ CC_1$，所以

$$\frac{AP_1}{AH}=\frac{PP_1}{C_1H}.$$

同理

$$\frac{CQ_1}{CH}=\frac{QQ_1}{A_1H}.$$

易知 $\triangle P_1PH \backsim \triangle Q_1QH$，$\triangle PC_1H \backsim \triangle QA_1H$，所以

$$\frac{PP_1}{QQ_1}=\frac{PH}{QH}=\frac{C_1H}{A_1H},$$

从而

$$\frac{AP_1}{AH}=\frac{PP_1}{C_1H}=\frac{QQ_1}{A_1H}=\frac{CQ_1}{CH}.$$

于是 $P_1Q_1 /\!/ AC$. HR' 平分 P_1Q_1，所以 HR' 也平分 AC，即 H，R'，M 共线. R' 就是 HM 与 $\angle ABC$ 的平分线的交点 R.

2. 如图 162，$\odot O$ 内，$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相切于 N. $\odot O$ 的弦 BA，BC 分别与 $\odot O_1$ 相切于 K，M. 不含 N 点的弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$ 的中点分别是 Q，P. 设 $\triangle BQK$ 与 $\triangle BPM$ 的外接圆的第二个交点为 B_1.

求证：四边形 BPB_1Q 为平行四边形.

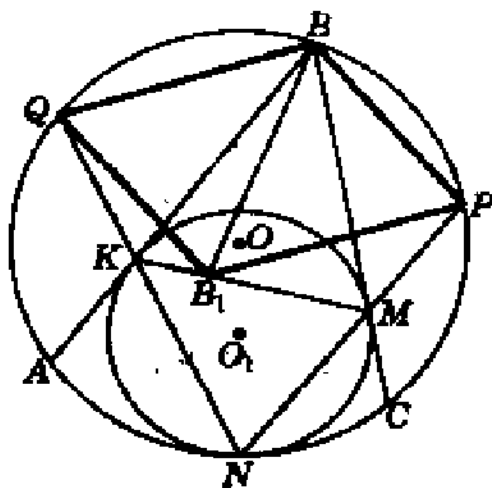


图 162

以 N 为位似中心，将 $\odot O_1$ 变成 $\odot O$. 设这时 K 变为 $\odot O$ 上一点 Q'，则 AB 变为 $\odot O$ 的过 Q' 的切线，它与 AB 平行. 由于过 Q' 的切线与弦 AB 平行，所以 Q' 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 Q. 故 N，K，Q 共线.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

同理，N,M,P 共线.

因为 Q,B_1,K,B 共圆，所以

$$\angle BB_1K=\angle BQK=180^\circ-\angle BPN.$$

因为 B,B_1,M,P 共圆，所以

$$\angle BB_1M=180^\circ-\angle BPN=\angle BB_1K,$$

从而 B_1,K,M 三点共线.

$$\angle QB_1B=\angle QKB=\angle AKN=\angle KMN=\angle B_1BP,$$

所以 $QB_1/\!/BP$.

同理 $PB_1/\!/BQ$. 证毕.

3. 如图 163，四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω. 直线 AB,CD 相交于 O. 圆 ω_1,ω_2 与 AB,CD 都相切，并且圆 ω_1 与 BC 相切于 K，圆 ω_2 与 AD 相切于 L. 已知 O,K,L 三点共线. 求证：BC 的中点、AD 的中点及圆 ω 的圆心三点共线.

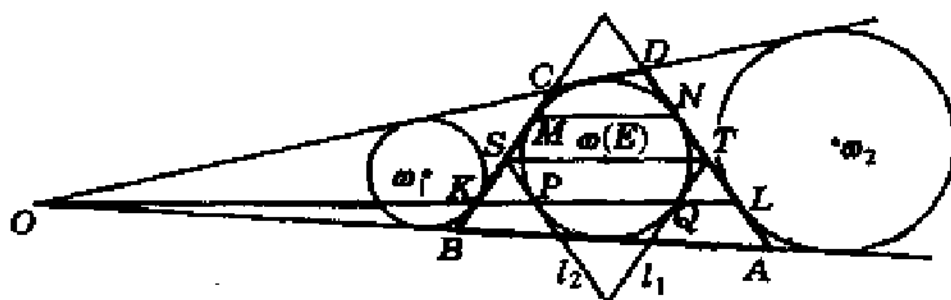


图 163

设 KL 与圆 ω 的交点为 P,Q. BC,AD 与圆 ω 的切点分别为 M,N.

以 O 为位似中心，将圆 ω_1 变为圆 ω，则 K 点处的切线 BC 变为 Q 点处的切线 l_1，$l_1/\!/BC$.

以 O 为位似中心，将圆 ω_2 变为圆 ω_1，到 L 点处的切线 AD 变为 P 点处的切线 l_2，$l_2/\!/AD$.

于是 l_1,l_2,BC,AD 围成一个平行四边形. 它是圆 ω 的外

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

切四边形，因而是菱形. 圆 ω 的圆心 E 是这个菱形的中心. 对角线 ST 过 E 而且与 MN，PQ 平行，到 MN，PQ 的距离相等. 所以 S，T 分别为 MK，NL 的中点.

由于 $BK=MC$(注)，所以 S 也是 BC 的中点. 同理 T 是 AD 的中点. 证毕.

注：(圆 ω 与 ω_1 的外公切线长)$-BK-KB$

$=BM-BK$

$=$圆 ω 与 ω_1 的内公切线长

$=CK-CM$

$=$(圆 ω 与 ω_1 的外公切线长)$-CM-CM$，

所以 $BK=CM$.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（八）任　我　游

87. 逆　平　行　线

读课外书就像逛公园，可以由着自己的性子四处浏览.本章的内容不在通常的中学课本内，但中学生不难读懂它.

在$\triangle ABC$中，如果$EF /\!/ BC$，并且E，F分别在AB，AC上，那么

$$\triangle AEF \backsim \triangle ABC. \qquad ①$$

如果E'，F'分别在AB，AC上，并且B，C，F'，E'四点共圆，那么

$$\angle AE'F' = \angle ACB,$$

从而

$$\triangle AE'F' \backsim \triangle ACB. \qquad ②$$

$E'F'$称为关于AB，AC与BC逆平行，在不致混淆时，也简称$E'F'$与BC逆平行.逆平行线截得的三角形与原三角形相似，但必须注意①，②同是表示两个三角形与原三角形相似，字母的对应关系却分别是$E \to B(F \to C)$，$E' \to C(F' \to B)$.

易知$EF /\!/ BC$，$E'F'$与BC逆平行时，$E'F'$与EF也是（关于AB，AC的）一对逆平行线.

不难证明，如果$E'F'$，MN都是BC的逆平行线，那么$E'F' /\!/ MN$（图164）.

如果BN，CM分别是AC，AB边上的高，那么MN与

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

BC 逆平行.这是最常见的一对逆平行线.

在第 38 节已经证过下面的结论:

外心 O 与顶点 A 的连线垂直于 BC 的逆平行线.

因此,作边的逆平行线,最简单的办法就是作 $OA(OB,OC)$ 的垂线.

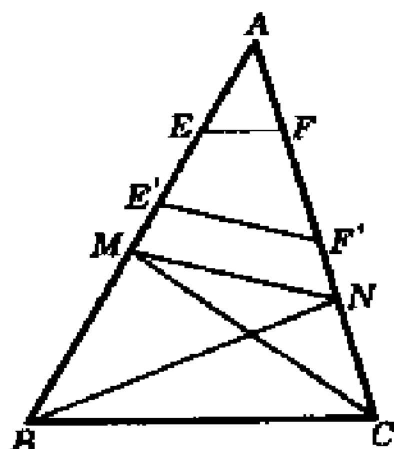


图 164

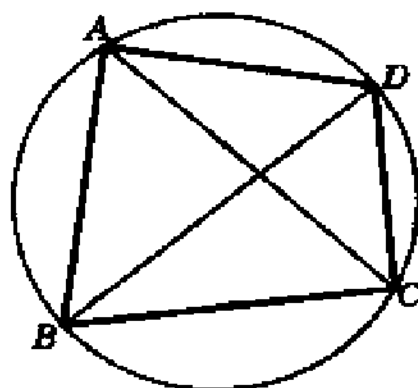


图 165

逆平行线并不限于三角形内.一般地,设 A,B,C,D 四点共圆,则称 AD,BC 关于 AB,CD 逆平行,也称 AD, BC 关于 AC,BD 逆平行(图 165).这与上面的定义实际上是一致的.

逆平行线的概念在证明中颇为有用,下面举一个例子.

如图 166,AB 是⊙O 的直径,PA 为切线.过 P 任作一割线交⊙O 于 C,D.连接 BC,BD 分别与 PO 相交于 E,F.求证:$EO=OF$.

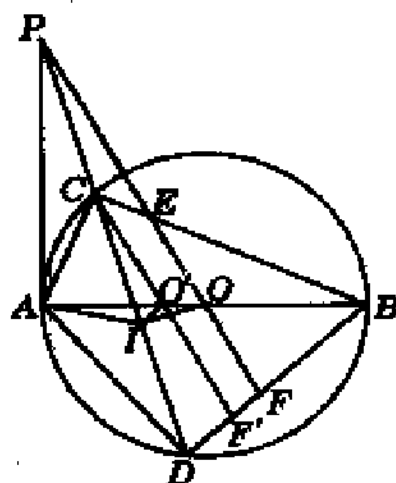


图 166

过 C 作 PO 的平行线,分别交 AB,BD 于 O',F'.只需证

$$CO'=O'F'. \quad ①$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

取 CD 的中点 I. 要证①，只需证

$$O'I /\!/ BD. \qquad ②$$

因为 A,C,B,D 四点共圆，所以 AC 与 BD 关于 AB,CD 逆平行. 要证②，只需证明 $O'I$ 与 AC 关于 AB,CD 逆平行，即 O',I,A,C 四点共圆. 换句话说，只需证明 AI 与 $O'C$ 关于 AB,CD 逆平行.

因为 $O'C /\!/ PO$，所以只需证明 AI 与 PO 关于 AB,CD 逆平行，即 A,I,O,P 四点共圆.

而由 $\angle OIP=\angle PAO=90°$，立即得出 A,I,O,P 四点共圆，从而 $EO=OF$ 成立.

88. 共轭重心(一)

几何学历史悠久，自欧几里得算起，也已经有两千多年. 经过两千多年的"采掘"，平面欧氏几何的大部分菁华已经落入人类手中. 但在 19 世纪后半叶，又发现了一个宝库，得出不少新结果. 这些结果可见以下书籍：

1. J. Casey,《近世几何学初编》，李俨编译，商务印书馆，1952 年出版.

2. R. A. Johnson,《近代欧氏几何学》，单墫译，上海教育出版社，1999 年出版.

3. W. Gallatly, *Modern Geometry of the Triangle*, London, 1910.

自本节起，我们介绍一些有关共轭重心的结果.

在第 81 节，已经说过等角共轭点. 设自 $\angle A$ 的顶点 A 引出两条射线，与它的两边成等角，则称它们为(关于 $\angle A$ 的)等角线. 在第 81 节，已经证明了以下定理：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

设过三角形三个顶点的三条直线交于一点 P，则它们的(关于三角形相应角)的等角线也交于一点 Q.

点 Q 称为点 P 的等角共轭点.

重心 G 的等角共轭点称为共轭重心.

1873 年法国的科学进步协会在里昂开会，会上 E・莱莫恩(Emile Lemoine)介绍了共轭重心及一系列相关问题，对上述平面欧氏几何的复兴起着重要的推动作用. 因此法、英等国称共轭重心为莱莫恩点，但德国的著作却称之为格黎伯(Grebe)点. 其实莱莫恩与格黎伯对共轭重心的知识均有贡献，但根据数学史家麦凯(Mackay)的研究，这个点并非某个人一时的发现，而是由不同的研究者研究它的各种性质，逐渐成为著名的点. 因此，还是称它为共轭重心为好.

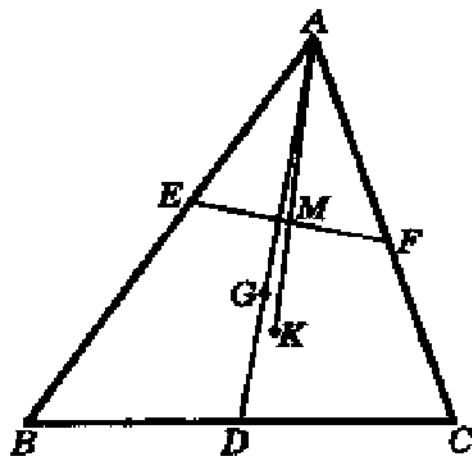


图 167

上节已经说过逆平行线. 如图 167，设 K 为共轭重心，EF 与 BC 是(关于 AB，AC 的)逆平行，则必有 AK 平分 EF.

事实上，$\triangle AEF \backsim \triangle ACB$，而直线 AK 正好与 $\triangle ACB$ 的中线 AD 相对应(因为 $\angle BAD = \angle FAK$)，所以 AK 平分 EF.

反过来，如果 AK 平分 EF，那么 EF 与 BC 逆平行.

事实上，设 EF 中点为 O，过 O 作 BC 的逆平行线 $E'F'$ (E'，F' 分别在 AB，AC 上)，则 $E'F'$ 被 AK 平分，即以 O 为中点. 因而 $E'E$ 与 $F'F$ 平行；但 $E'E$ 与 $F'F$ 相交于 A，所以只能是 E' 与 E(或 F' 与 F)重合. 从而 $E'F'$ 与 EF 重合，EF 与 BC 逆平行.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

89. 共轭重心(二)

如图 168，在$\triangle ABC$中，设G为重心. $\triangle BGC$，$\triangle CGA$，$\triangle AGB$的外心分别为P，Q，R. 证明：$\triangle PQR$的重心、共轭重心分别为$\triangle ABC$的外心O、重心G.

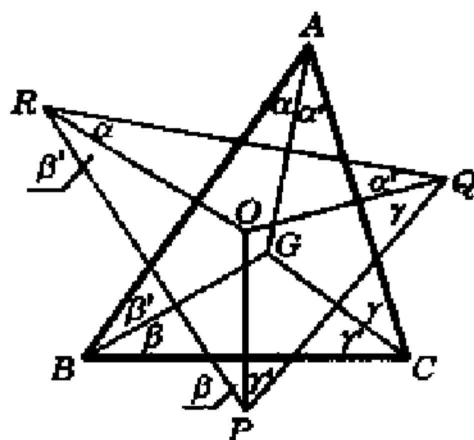


图 168

设$\angle BAG=\alpha$，$\angle GAC=\alpha'$，$\angle ACG=\gamma$，$\angle GCB=\gamma'$，$\angle CBG=\beta$，$\angle GBA=\beta'$.

因为$\triangle AGB$的外接圆与$\triangle BGC$的外接圆的公共弦是GB，所以$PR\perp GB$. 又$\triangle ABC$的外接圆与$\triangle AGB$的外接圆的公共弦是AB，所以$OR\perp AB$. 从而$\angle PRO$与$\angle OBG$是等角的余角，$\angle PRO=\angle OBG=\beta'$. 同理可定出其他角，如图 168 所示.

如图 169，延长中线BE到D，使$ED=GE$，则易知$\triangle AGD$的三边分别与GA，GB，GC重合或平行，而且中线AE与边GA，AD所成角为α'，γ等等.

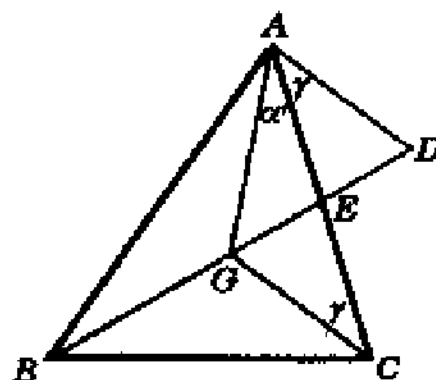


图 169

由于$\triangle PQR$的边分别与GA，GB，GC垂直，所以也分别与$\triangle AGD$的边垂直，这两个三角形相似. 而OQ与边RQ，QP所成角为α'，γ等等，所以OQ等等是中线，O是$\triangle PQR$的重心.

又P是$\triangle BGC$的外心，所以

$$\angle BPG=2\angle BCG=2\gamma'.$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

而 PR 垂直平分 GB，所以

$$\angle RPG=\frac{1}{2}\angle BPG=\gamma'=\angle OPQ.$$

即在$\triangle PQR$ 中，PG 与 PO 是关于$\angle RPQ$ 的等角线.

同理可证 QG 与 QO，RG 与 RO 是关于相应角的等角线. 所以 O，G 共轭，G 是$\triangle PQR$ 的共轭重心.

90. 塔　克　圆

自$\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P 开始，交错地作相应边的逆平行线、平行线得 Q，R，S，T，U（图 170）. 证明：$UP/\!/AC$，并且 P，Q，R，S，T，U 六点共圆.

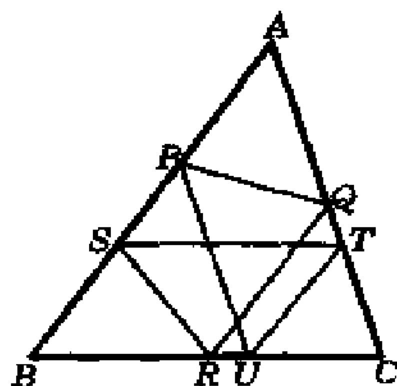


图　170

因为 PQ 与 BC 逆平行，所以$\angle APQ=\angle C$. 同理$\angle RSB=\angle C$. 又 $QR/\!/AB$，所以四边形 $QRSP$ 是梯形，而且是等腰梯形（两腰与底边等倾角），所以 $PQ=SR$.

同理　　$TU=SR$.

于是 $TU=PQ$. 但 TU、PQ 与 AC 等倾角，所以 U，P 到 AC 的距离相等，即 $UP/\!/AC$.

显然等腰梯形的顶点共圆，所以 P，S，R，Q 共圆. 又 PU 与 SR 逆平行，所以 P，S，R，U 共圆，即 P，Q，R，S，U 共圆.

同理 T 也在这个圆上.

这样的圆称为塔克（Tucker）圆. 塔克圆的圆心，位置当然随 P 点的位置而变化. 但我们有下面的结果：

设$\triangle ABC$ 的外心为 O，共轭重心为 K.

不论 P 点在 AB 上如何选取，上面得到的塔克圆，圆心

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

一定在直线 KO 上.

事实上,设 PQ 的中点为 L, RS 中点为 M, TU 中点为 N,则由于 K 为共轭中心, KA 过 L 等等.

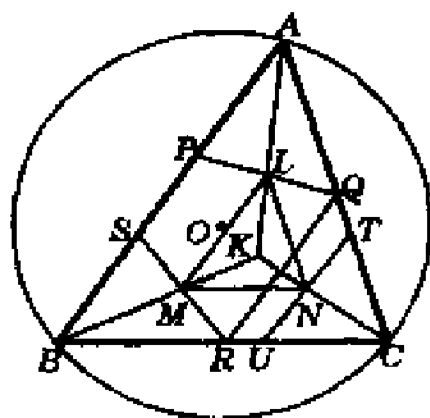


图 171

因为 LM 是梯形 $PQRS$ 的中位线,所以 $LM /\!/ AB$. 同理 $MN /\!/ BC$, $NL /\!/ CA$.

于是 K 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle LMN$ 的位似中心. 在这一位似变换下, $\triangle ABC$ 的外心 O 变为 $\triangle LMN$ 的外心 W, $WL=WM=WN$,并且 W 在 KO 上, $WL /\!/ OA$.

在第 38 节已指出 $OA \perp PQ$,所以 $WL \perp PQ$. 因此 W 在 PQ 的垂直平分线上.

同理 W 在 TU 的垂直平分线上. 因此 W 就是塔克圆的圆心.

91. 莱 莫 恩 圆

自 $\triangle ABC$ 的共轭重心 K 作各边的平行线,与其他两边相交,得六个点 P, Q, R, S, T, U,这六点必定共圆.

如图 172,四边形 $APKQ$ 是平行四边形,所以 KA 平分 PQ. 因为 K 是共轭重心,所以 PQ 与 BC 逆平行(参见 87 节).

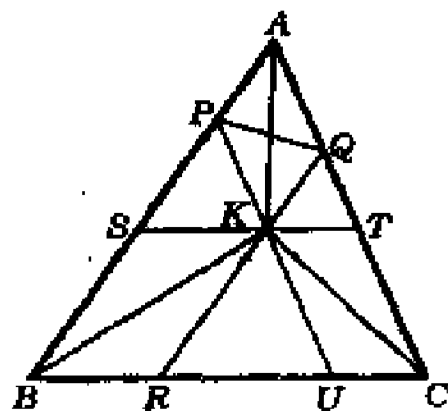


图 172

同理 TU 与 AB 逆平行, RS 与 AC 逆平行.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

因此 P,Q,R,S,T,U 六点共圆(塔克圆).

上面所得的圆称为第一类莱莫恩圆.

自共轭重心 K 作各边的逆平行线,与其他两边相交,得 P,Q,R,S,T,U 六点,这六点也必定共圆.

如图 173,因为 K 是共轭重心,PS 与 AC 逆平行,所以 PS 被 K 平分.

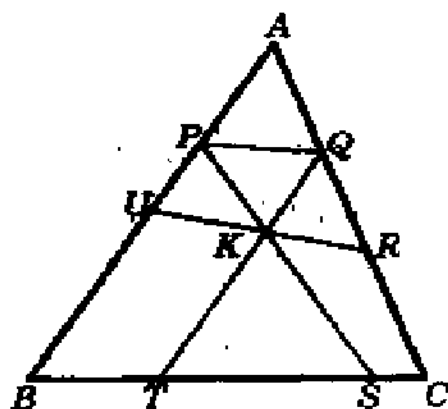


图 173

同理 QT 被 K 平分.于是四边形 $PQST$ 是平行四边形,$PQ/\!/BC$.

同理,$RS/\!/AB$,$TU/\!/AC$.

于是 P,S,R,U,T,Q 六点共圆(塔克圆).

上面所说的圆称为第二类莱莫恩圆.

在第二类莱莫恩圆中,弦 PS,QT 互相平分,从而它们的公共中点 K 就是圆心.即共轭重心 K 是第二类莱莫恩圆的圆心.

第一类莱莫恩圆的圆心 W 在哪里呢?

由上节,W 在 KO 上.而且由于图 172 中,KA 与 PQ 互相平分,所以 PQ 的中点 L 也是 KA 的中点.而

$$\frac{KW}{KO}=\frac{KL}{KA}=\frac{1}{2},$$

所以第一类莱莫恩圆的圆心 W 是线段 KO 的中点.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（九）已觉此处景物好

92. 四点间的距离

本章将介绍几个定理及定理的证明.

平面上任意四点 A,B,C,O，两两之间的距离共有六个，即图中的 a,b,c,x,y,z. 这六个距离有一定的关系.

由余弦定理，

$$\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz},\qquad ①$$

$$\cos\beta=\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx},\qquad ②$$

$$\cos\gamma=\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}.\qquad ③$$

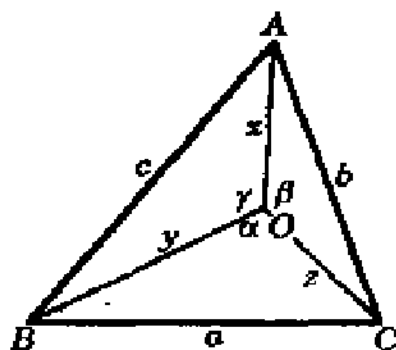


图 174

而 α,β,γ 之间有关系：

$$\alpha+\beta+\gamma=360°\qquad ④$$

（或类似的关系，随 O 的位置不同而略有不同，但不影响最后的结论）. 因此

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\cos(360°-\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}.\end{aligned}\qquad ⑤$$

将①，②，③代入⑤，得

$$\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\cdot\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$-\sqrt{\left[1-\left(\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}\right)^2\right]}.$$

化简得

$$2z^2(x^2+y^2-c^2)-(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)$$
$$=-\sqrt{[4y^2z^2-(y^2+z^2-a^2)^2][4z^2x^2-(z^2+x^2-b^2)^2]}.$$

平方得

$$[2z^2(x^2+y^2-c^2)-(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)]^2$$
$$=[4y^2z^2-(y^2+z^2-a^2)^2][4z^2x^2-(z^2+x^2-b^2)^2].$$

再经过一番化简得

$$\sum a^2(x^2-y^2)(x^2-z^2)-\sum a^2(b^2+c^2-a^2)x^2+a^2b^2c^2=0, \qquad ⑥$$

其中$\sum$表示将 a,b,c 轮换，x,y,z 轮换而得出的三个式子的和.

在得出⑤式时，破坏了“对称性”(爱因斯坦大概会批评这种推导是“丑陋的”)，但最后导出的⑥关于 a,b,c 对称，也关于 x,y,z 对称.

运用一点距离几何学的知识，可以不破坏“对称性”，“优雅”地得出⑥，而且可以写成更漂亮的形式：

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & x^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & y^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & z^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad ⑦$$

⑦的左边是一个对称的五阶行列式(与⑥式左边只差一个因子 -2)，它有很强的几何意义，即如果 O,A,B,C 是空间四点，设四面体 $OABC$ 的体积为 V，则⑦式左边就是 $288V^2$. 所

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

以它是已知六条棱长，求四面体体积的公式．当 O,A,B,C 在同一平面时，体积退化为 0.

比⑦式左边低一维的、与平面上三点 A,B,C 有关的四阶行列式是

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \left(=-\sum a^4+2\sum b^2c^2\right),$$

其中 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的边长.

这个行列式是 $16\Delta^2$，Δ 是 $\triangle ABC$ 的面积.

93. 笛卡儿关于圆的定理

如果半径为 r_1,r_2,r_3 的三个圆两两外切，同时又都与半径为 r_4 的圆外切，如图 175 所示，那么上一节的公式中，

$$a=r_2+r_3,\ b=r_3+r_1,\ c=r_1+r_2;$$
$$x=r_4+r_1,\ y=r_4+r_2,\ z=r_4+r_3. \quad ①$$

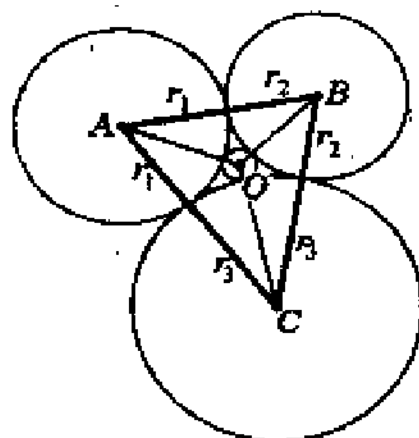


图 175

代入上节⑥，经过恒等变形，可得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{r_ir_j}. \quad ②$$

这一变形相当麻烦．如果熟悉行列式的性质，将①代入上节⑦，可以比较简单地导出②.

如果半径为 r_4 的圆与前三个圆内切，②仍然适用，只需将其中 r_4 均改为 $-r_4$.

于是，当第四个圆与前三个圆外切时，由②得

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4(r_1+r_2+r_3)}{r_1r_2r_3}, \qquad ③$$

从而

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}. \qquad ④$$

当第四个圆与前三个圆内切时，③中 r_4 应换成 $-r_4$，所以④应改为

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)}. \qquad ⑤$$

以上公式称为笛卡儿(Descartes)关于圆的定理.

在 3 维空间中，如果半径分别为 $r_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的四个球互相外切，第五个半径为 r_5 的球与前四个相切，那么

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}\frac{1}{r_ir_j}. \qquad ⑥$$

如果第五个圆与第 i 个圆$(1\leqslant i\leqslant 4)$外切，$\frac{1}{r_5r_i}$前而放正号；如果第五个圆与第 i 个圆内切，$\frac{1}{r_5r_i}$前面改放负号.

94. 笛沙格定理的证明

自本节至第 96 节，我们将证明本书开头出现的几个著名定理.

这些定理的证法很多，可以在常见的书上查到. 这里介绍的证法较不常见. 不过均超出了初等平面几何的范围，介绍的目的是希望"跳出去"，从外面看一看"庐山面目".

本节先证明笛沙格定理.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

笛沙格定理与透视有关.在平面上倒是较难敲碎的"硬果子".但在空间,情况反而变得简单.

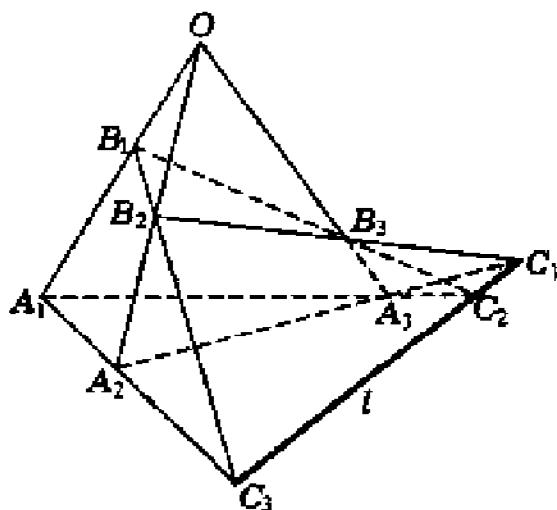


图 176

如图 176,设$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$在两个不同的平面M,N上,面对应顶点交于一点O.这时A_2A_3与B_2B_3的交点C_1也是平面M,N的公共点,因而必在M,N的交线l上.同理C_2,C_3也都在l上,即C_1,C_2,C_3三点共线.

设想再有一个光源P,将O,B_1,B_2,B_3都照射到平面M上,就得到在平面M上的两个三角形:$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$,它们的对应顶点的连线交于同一点O',形成平面上的笛沙格定理的图.

反过来,设平照M上有两个三角形:$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$,它们的对应顶点交于同一点O'.我们可以在平面M外取一点P,连接PO',并在PO'上任取一点O(图 177).

在平面$PO'A_1$内,连接OA_1,交PB_1'于B_1;

在平面$PO'A_2$内,连接OA_2,交PB_2'于B_2;

在平面$PO'A_3$内,连接OA_3,交PB_3'于B_3.

这时$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle B_1B_2B_3$的对应顶点的连线交于同一点O.因此根据上面所说(空间的笛沙格定理),对应边的交点C_1,C_2,C_3共线.其中C_1是A_2A_3与B_2B_3的交点,它是平面PB_2B_3与平面M的公共点,因而也在这两个平面的交线$B_2'B_3'$上,即C_1也是A_2A_3与$B_2'B_3'$的交点.同样C_2,C_3也分别是A_3A_1与$B_3'B_1'$,A_1A_2与$B_1'B_2'$的交点.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

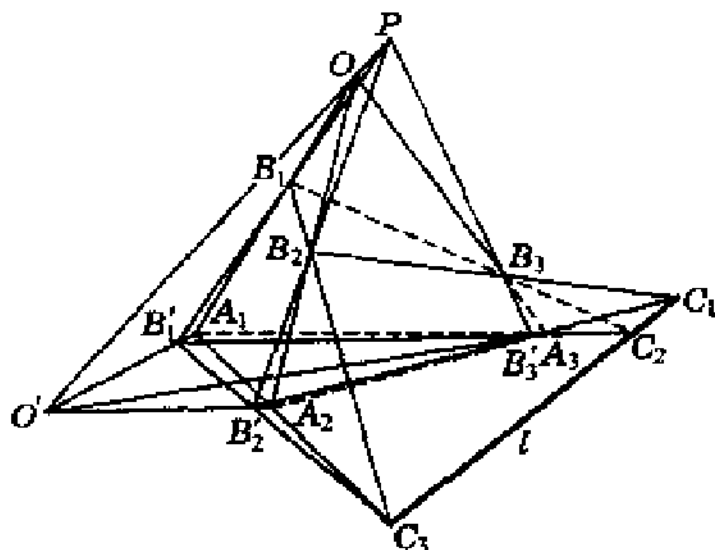


图 177

于是$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$的对应边的交点C_1, C_2, C_3共线，即平面的笛沙格定理成立.

95. 五点确定二次曲线

本节讨论二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线以及退化的情况，即两条直线)的一个重要性质. 需要一点解析几何的知识.

大家知道两点确定一条直线，(不在同一条直线上的)三点确定一个圆. 那么，几个点确定一条二次曲线呢?

一般情况下，五点确定二次曲线，更准确些说：

设$P_i(i=1,2,3,4,5)$为任意五点，则必有一条二次曲线通过这五点. 更进一步，当且仅当五点中，每四点都不共线时，过这五点的二次曲线是唯一的.

首先证存在性. 设直线$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$的方程分别为

$$l_i=0 \quad (i=1,2,3,4), \qquad ①$$

其中$l_i(1\leqslant i\leqslant 4)$都是$x, y$的一次式. 则二次曲线

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$l_1l_3=0 \qquad ②$$

与

$$l_2l_4=0 \qquad ③$$

都过 $P_i(i=1,2,3,4)$.

因而对任意实数 λ_1,λ_2,

$$\lambda_1l_1l_3+\lambda_2l_2l_4=0 \qquad ④$$

也都是过上述四点的曲线.

将 P_5 的坐标代入(4),可解得一组不全为 0 的 λ_1,λ_2.对这样的 λ_1,λ_2,④是过上述五个点的二次曲线,除非此时④成为恒等式.对这种情况,$l_1l_3=0$(即 $l_2l_4=0$)就是过上述五个点的二次曲线.

其次证唯一性.设五点 $P_i(1\leqslant i\leqslant5)$中每四点不共线,而过这五点有两条二次曲线

$$f_i=0 \quad (i=1,2), \qquad ⑤$$

其中 f_i 都是 x,y 的二次式.则对任意的实数 λ_1,λ_2,

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=0 \qquad ⑥$$

也过上述五点.

不妨将直线 P_1P_2 取作 x 轴,即它的方程是

$$y=0. \qquad ⑦$$

在 x 轴上取一个与上述五点不同的点 Q,适当选取 λ_1,λ_2(即将 Q 的坐标代入⑥,解出一组 λ_1,λ_2)可使曲线⑥过 Q.设这时将含 y 的项放在一起,不含 y 的项放在一起,即设

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=yl+\varphi(x), \qquad ⑧$$

其中 l 是 x,y 的一次式,$\varphi(x)$是 x 的二次式.

将 P_1,P_2,Q 的坐标依次代入⑧,得

$$\varphi(x_i)=0 \quad (i=1,2,3), \qquad ⑨$$

其中 x_1,x_2,x_3 分别为 P_1,P_2,Q 的横坐标.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$\varphi(x)$是 x 的二次多项式，却有 3 个不同的根，所以必有 $\varphi(x)$恒等于 0，从而

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=yl. \tag{10}$$

于是二次曲线

$$yl=0 \tag{11}$$

过五点 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$，$y=0$ 或 $l=0$ 中必有一个过其中三点，另一个过其余两点．不妨设 $y=0$ 过其中三点（即将过三点的直线取作 $y=0$），这三点为 P_1,P_2,P_3，$l=0$ 过 P_4,P_5，而且可以将⑪作为 $f_1=0$.

重复上面的过程，但这次取一个不在 $yl=0$ 上的点作为 Q. 这时得出的曲线⑥过 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$及 Q. 并且由于 $y=0$ 过 P_i 中三点，仍有一次式 l'使

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=yl',$$

从而

$$yl'=0$$

过 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$及 Q. 因为 $y=0$ 过 P_1,P_2,P_3，不过 Q，所以直线 $l'=0$ 过 P_4,P_5 及 Q. 但过 P_4,P_5 的直线 $l=0$ 不过 Q，这就导致矛盾．矛盾表明过五点只有一条二次曲线．

通常认为一般二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{12}$$

有 6 个参数 a,b,c,d,e,f. 可假定其中一个非 0 的参数为 1，实际上只有 5 个参数，因而用五个点的坐标代入⑫，得出五个方程，可以定出其他五个参数．但这种说法似是而非．因为下节我们可以看到三次曲线

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0 \tag{13}$$

有十个参数，却不能由九个点确定．确定它需要十个点．

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

96. 帕斯卡定理的证明

有了上节的准备，我们可以证明帕斯卡定理了.

仍用图 2 及其中的记号.

设直线 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6，A_6A_1 的方程依次为

$$l_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,6), \tag{1}$$

$l_i(1\leqslant i\leqslant 6)$都是 x，y 的一次式.特别地，$l_1=y$(即以 A_1A_2 为 x 轴).

设圆的方程为

$$f=0, \tag{2}$$

f 是 x，y 的二次式.

设直线 DE 的方程为

$$l=0, \tag{3}$$

l 是 x，y 的一次式.

三次曲线

$$l_1l_3l_5=0 \tag{4}$$

显然通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$及 D，E，F(因为直线 $l_1=0$ 过 A 点，所以 A 点坐标代入④，左边为 0，即④通过 A_1).

同理，三次曲线

$$l_2l_4l_6=0 \tag{5}$$

也通过上述 9 点.

三次曲线

$$lf=0 \tag{6}$$

通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$D$，$E$ 八点.如果有实数 λ_1，λ_2 使

$$\lambda_1l_1l_3l_5+\lambda_2l_2l_4l_6=lf \tag{7}$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

恒成立，那么⑥也通过 F 点. 由于②不过 F，所以③过 F，即 D,E,F 三点共线. 假定对任意实数 λ_1,λ_2，⑦不成立(不成为恒等式)，那么

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=0 \qquad ⑧$$

是通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6),D,E$ 八个点的三次曲线.

设过 A_3,A_4,A_5,A_6 及 E 五点的二次曲线为 Ω. 取点 P 在 x 轴上，点 Q 不在 x 轴及 Ω 上. 将点 P,Q 的坐标代入⑧，得出两个关于 λ_1,λ_2 的方程，解出 λ_1,λ_2. 对这样的 λ_1,λ_2，⑧过十个点：$A_i(1\leqslant i\leqslant 6),D,E,P,Q$.

设这时

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=yf_1+\varphi(x), \qquad ⑨$$

其中 f_1 是 x,y 的二次式，$\varphi(x)$ 是 x 的三次式. 将 A_1,A_2,D,P 坐标分别代入⑨，得

$$\varphi(x_j)=0 \quad (j=1,2,3,4), \qquad ⑩$$

其中 $x_j(1\leqslant j\leqslant 4)$ 为上述四点的横坐标. 由于 $\varphi(x)$ 是 x 的三次式，却在四个 x_j 处为 0，所以必有 $\varphi(x)$ 恒等于 0，即

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=yf_1. \qquad ⑪$$

于是

$$yf_1=0 \qquad ⑫$$

是过上述十点的三次曲线，而

$$f_1=0 \qquad ⑬$$

则是过其中六点：A_3,A_4,A_5,A_6,E,P 的二次曲线. 但过 A_3,A_4,A_5,A_6,E 五点的二次曲线是唯一的，即曲线 Ω，但它不过 P 点. 这一矛盾表明必有 λ_1,λ_2 使⑦成为恒等式，从而直线

$$l=0$$

过 D,E,F 三点.

我们实际上证明了以下定理：

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

设三次曲线 C_1，C_2 有 9 个公共点，但没有无限多个公共点，如果三次曲线 C_3 通过其中八个公共点，那么 C_3 也通过第九个公共点.

这称为 Caylay－Bacharach 定理.

更一般地，设曲线 C_1，C_2 的次数分别为 d_1，d_2，有 d_1d_2 个公共点，但没有无穷多个公共点. 如果次数为 d_1+d_2-3 的曲线 C_3 过其中的 d_1d_2-1 个公共点，那么它也过余下的一个公共点.

上面的定理属于代数几何. 代数几何研究代数曲线，即形如

$$F(x,y)=0$$

的曲线，其中 F 是 x，y 的多项式. 通常解析几何只研究二次曲线，更高次的曲线则是代数几何研究的内容.

帕普斯定理是帕斯卡定理的特殊情况，其中二次曲线退化为两条直线. 上面的证明已包括这种情况在内.

大家还看到三次曲线④，⑤及更一般的

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6=0$$

都过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$D$，$E$，$F$，所以九个点不能确定三次曲线.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（十）更有好景

97. 格点多边形

组合几何，兼有组合与几何的特点．本章略举数例，以见一斑．

间距为 1 的水平线与间距为 1 的铅直线组成平面直角坐标系．

在平面直角坐标系中，水平线与铅直线的交点，也就是横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点或格点．

顶点全是格点的多边形称为格点多边形．

如图 178，如果一个格点多边形的边都不是平行于 y 轴的铅直线，也都不是平行于 x 轴的水平线，证明在这个多边形内部的水平线段的和恰好等于铅直线段的和．

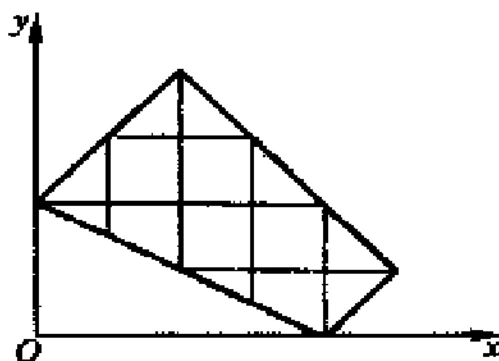


图 178

设这些水平线段的长为 a_1，a_2，…，a_k，它们将这个格点多边形分成（上、下）两个三角形与若干个梯形．三角形与梯形的高都是 1，因此这个格点多边形的面积

$$S=\frac{1}{2}[a_1+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots$$
$$+(a_{k-1}+a_k)+a_k]\times 1$$

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$=a_1+a_2+\cdots+a_k,$$

即水平线段的和(在数值上)恰好等于S.

同理铅直线段的和也等于S.

因此结论成立.

98. 直线的条数

平面上有n条直线，每条直线恰好与其余$n-1$条直线中的1 999条直线相交. 求n的所有可能值.

本题的第一步是将n条直线分类：平行的直线归于同一类. 设共分为k类.

由于每条直线恰与其余的$n-1$条直线中的1 999条直线相交，所以任意去掉一个类后，其余的$k-1$个类共有1 999条直线. 因此，每个类中含有的(互相平行的)直线的条数相等. 设这条数为t，则

$$(k-1)t=1\,999.$$

因为1 999是质数，所以

$$k-1=1,\quad t=1\,999;$$

或
$$k-1=1\,999,\quad t=1.$$

于是直线的条数$n=kt=3\,998$或$2\,000$.

99. 两人博弈

下面是一个两人博弈的问题：

甲、乙两人轮流将平面上未染色的点染色. 甲每次将1个点染成红色，乙每次将10个点染成蓝色. 如果出现3个红点构成正三角形，甲就获胜. 甲先染，问乙能否阻挡甲取胜?

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

答案是乙不能阻挡甲取胜.

在甲染第 7 个点时，这个点 A_7 与前面的红点 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 可作为正三角形的两个顶点，第 3 个顶点有两种选择（分别在 A_7A_i 的两侧）. 这样，可与前面的两个红点合在一起组成正三角形的红点就有

$$2\times 6=12>10$$

个. 而此乙无法阻挡甲在第 8 步获胜.

严格说来，上面的证明还有点毛病：

1. 甲染 A_7 后，所成 12 个正三角形 $A_7A_iB_i$，$A_7A_iC_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 的顶点 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，是否有重合的？

不难看出，只要甲在同一条直线上取 $A_1,A_2,\cdots,A_7$，所产生的 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 就不会有重合的.

2. 上述 12 个点 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 中，会不会已有乙染过的点（乙是“赛诸葛”，料事如神，已经先作了布置）？

只要 A_7 取得足够远，就可以避开乙的“埋伏”. 我们可以设第 7 轮以前染的点（有限多个）全在一个圆内，圆心为 O，半径为 R（图 179）. 取 A_7 距 O 为 $3R$，则对 $B_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 有

$$A_iB_i=A_iA_7\geqslant OA_7-OA_i$$
$$\geqslant 3R-R=2R,$$

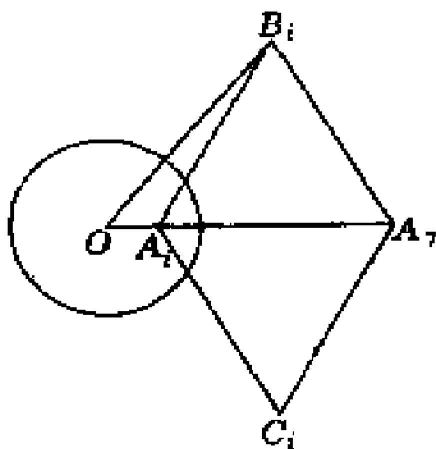


图 179

从而 $$OB_i\geqslant A_iB_i-OA_i>2R-R=R.$$

即 B_i 在⊙O 外，不会与乙已染的点重合. 同理 $C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 也不会与乙已染的点重合.

这样，只要甲在一条直线上取点，第 7 个点取得足够远，则第 8 次染色时，便可取得胜利.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

不难看出，甲只染 7 个或更少的点时，还不能获胜.

本题中，10 即使换成更大的数，如10 000，乙仍不能阻挡甲获胜. 因为甲染第 n 个点时，可产生 $2(n-1)$个"获胜点". 当 n 很大时，$2(n-1)$大于10 000. 用句"行话"来说，获胜点的个数是"一阶无穷大"，而乙每次染的点数是一个"常数".

有人从第一次、第二次、……说到第 n 次. 其实前若干次是不重要的，不是关键，应直接讨论第 7 次. 有人用 $2C_n^2>10n$ 来解，不如上面用 $2(n-1)>10$ 好.

100. 同色的等腰三角形

将平面上的点染上红、蓝、黄中任一种颜色. 不论怎样染，证明总有一个等腰三角形三个顶点同色.

先看一个较简单的问题：将平面上的点染上红、蓝两种颜色中的任一种. 不论怎样染，总有一个等腰三角形三个顶点同色.

这个问题不难. 先任取一点 O，不妨设 O 为红点，以 O 为圆心任作一圆. 如果圆上有两个红点，结论已经成立. 如果圆上只有一个红点，那么其余的点都是蓝点. 设 A，B 是圆上的两个蓝点，那么 A，B 将圆分成两个弧，其中至少有一条弧的中点 C 不是红点，$\triangle ABC$ 即为所求.

另一种证法是考虑一个正五边形. 五个顶点中必有三个点同色(面为只有两种颜色)，而这三点又构成等腰三角形.

现在回到染三种颜色的问题. 将上面的两种解法结合起来即可：

先任取一点 O，不妨设 O 为红点，以 O 为圆心任作一圆. 圆上如有两个红点，结论已经成立. 设圆上至多有一个红点 P.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

考虑这圆的内接正五边形. 可以设五个顶点都不是红色(否则绕圆心 O 稍作旋转，使顶点都不是红色)，这五点中必有三点同色，而这三点又构成等腰三角形.

101. 折 纸 穿 针

在一张矩形纸片上有一些黑点：

(a) 所有黑点共线；

(b) 黑点共 3 个，不共线.

试将纸折几次，折痕不过任何黑点. 然后用一根针穿过所有黑点，但不穿过任何其他的点.

证明在(a)，(b)两种情况，上述折纸穿针的要求必能成功.

先考虑情况(a). 设黑点都在直线 a 上，从左到右依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 又设 A_iA_{i+1} 的垂直平分线为 l_i($i=1, 2, \cdots, n-1$).

沿 l_1 将纸对折，使 A_2 落在 A_1 上而. 再将上而的纸沿 l_2 对折，使 A_3 落在 A_2 上而. 这样继续下去，直至将上面的纸沿 l_{n-1} 对折，使 A_n 落在 A_{n-1} 上面. 然后将针垂直纸面穿过 A_n，$A_{n-1}, \cdots, A_1$.

情况(b)较为复杂. 设三个黑点为 $\triangle ABC$ 的三个顶点. 可以假定在 $\triangle ABC$ 外的纸片部分非常狭窄，其宽度小于任一个指定的正数 ε. 否则可采取如下步骤：

先作一条与 BC 平行的直线 $B'C'$，与 BC 的距离为 $\frac{\varepsilon}{2}$(如面 180). 然后将纸折叠，使纸的角 O 落到 $B'C'$ 上. 再折叠一次，使第一次的折痕落到 $B'C'$ 上. 如此继续下去，每次使上

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

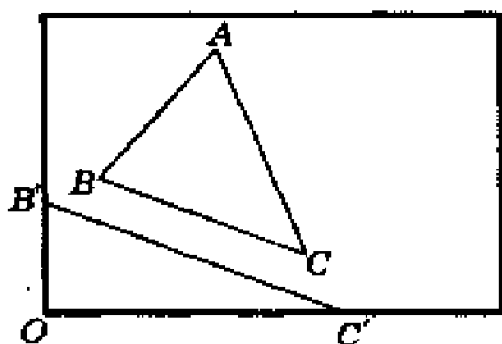


图 180

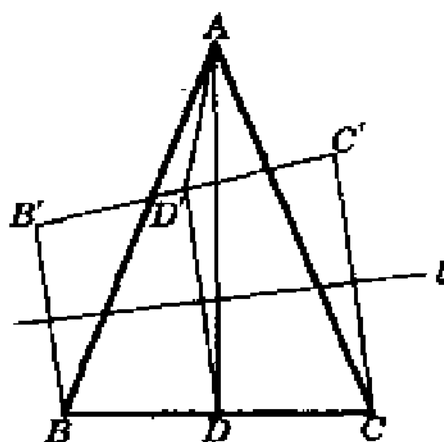


图 181

一次的折痕落到 $B'C'$ 上. 这样折叠若干次后，纸片边缘到 BC 的距离小于 $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 对 AB，AC 也可作类似的处理.

如果有两条边相等，例如 $AB=AC$，我们先折叠一次(图 181). 如果折痕 $l\parallel BC$，那么 B，C 的对应点 B'，C' 仍满足 $AB'=AC'$. 我们使 l 稍偏一点，不与 BC 平行，这时 $AB'\neq AC'$，其中 B'，C' 分别为 B，C 关于 l 的对称点(可以严格证明如下：设 BC 中点为 D，D 关于 l 的对称点为 D'. 因为 l 不与 BC 平行，所以 DD' 不与 BC 垂直，不妨设 $\angle BDD'<90°$. 这时 A 与 B 在直线 DD' 的两侧. $\angle B'D'D=\angle BDD'<90°$. 所以 $\angle AD'B'>180°-\angle B'D'D>90°$. 因此 $AB'\neq AC'$).

由于纸在 $\triangle ABC$ 外的部分很窄，所以 B'，C' 都不在纸上.

此外，以 A 为圆心，BC 为半径作圆. 只要 l 很接近 BC，就可以使 B'，C' 都不在圆上. 这样 AB'，AC' 均不等于 $B'C'$.

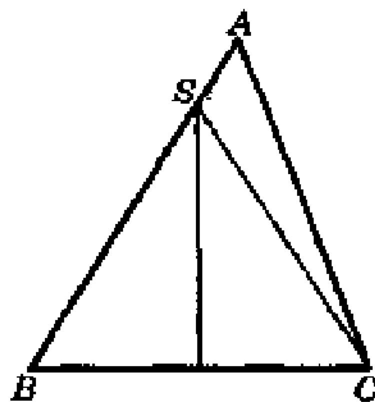


图 182

于是，总可以假定 $\triangle ABC$ 的边两两不等. 设 $AB>AC>BC$. 如图 182，

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

先沿 BC 的中垂线 l 折叠使 B 与 C 重合. 因为 $AB>AC$,l 与 AB 相交于 AB 内部一点 S. 由于纸在三角形外的部分很窄，所以 A 不与其他点重叠. 再沿 AC 的中垂线折叠，使 C 与 A 重合. 然后用针垂直于纸面，穿过 C,B,A 三点.

102. 先猜后证

确定平面上所有至少包含三个点的有限点集 S，它们满足下述条件：

对于 S 中任意两个互不相同的点 A,B，线段 AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴.

我们先猜一下 S 可以是什么样的点集.

显然正三角形的三个顶点组成的集符合要求. 正方形的顶点组成的集也符合要求. 更一般地，正 $n(n\geqslant 3)$ 边形的 n 个顶点组成的集符合要求.

反过来，我们希望符合要求的点集 S 只有上述几种情况，即设 S 有 n 个点 $(n\geqslant 3)$，我们设法证明这 n 个点是正 n 边形的顶点.

正 n 边形内接于圆. 我们先来证明 S 中的 n 个点共圆.

圆心在哪里呢?

圆心当然是与这 n 点有关的点. 与 n 点有关的点中，最简单最常见的一个就是这 n 个点的重心. 设 G 为这 n 个点的重心. 对 S 中任两点 A,B，要证明

$$GA=GB. \quad ①$$

关于线段 AB 的垂直平分线作对称. 由 S 满足的条件，经过这一对称，S 变为自身，因而重心 G 也变为自身，即 G 在 AB 的垂直平分线上. 所以①成立.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

于是 S 中的所有点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都在一个以 G 为圆心的圆上，它们构成一个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$.

关于 A_1A_3 的对称轴作对称，S 不变，所以 A_2 一定变为自身，即 A_2 是 $\overparen{A_1A_3}$ 的中点. 同理，A_i 是 $\overparen{A_{i-1}A_{i+1}}$ 的中点 ($i=1, 2, \cdots, n, A_{n+1}=A_1$). 因此 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形.

解决本题的关键是"猜". 大胆地猜，先猜出 S 必由正 n 边形的顶点组成，再猜出这正 n 边形的内接圆圆心是它们的重心. 大胆假设，小心求证，是科学研究的重要方法.

103. 距离为有理数

平面上是否有无穷多个点，两两的距离都是有理数?

问题太容易了！一条数轴上的整点，两两的距离都是整数!

再加上一点限制就不容易了:

平面上是否有一个无穷点集，无三点共线，并且任两点之间的距离都是有理数?

如果只要求这些点不全共线，问题还比较容易. 现在要求每三点都不共线，这就困难多了.

仅仅要求每三点不共线，倒也不难做到：任取一条二次曲线，最简单当然是一个圆，任一条直线与圆(或二次曲线)至多有 2 个公共点，所以圆(二次曲线)上每三点不共线.

因此，我们可以先作一个半径为 1 的圆，然后设法在圆上找距离为有理数的点.

不妨设圆心为原点O. 单位圆上的点A，坐标都可以写成

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$(\cos\alpha, \sin\alpha)$的形式，其中 α 是 OA 与 x 轴正方向所成的角(图 183).

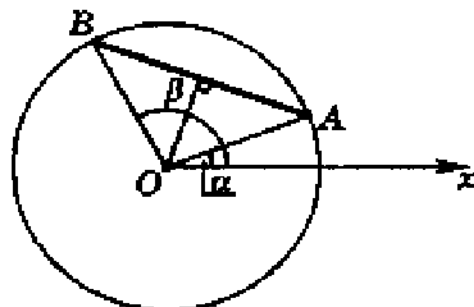


图 183

于是圆上任两点 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$B(\cos\beta, \sin\beta)$之间的距离是

$$AB=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad ①$$

而

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad ②$$

如果取 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-s^2}{1+s^2}$，那么

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2s}{1+s^2}.$$

同样，取 $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，那么 $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$. 因此当 s，t 为有理数时，AB 是有理数.

于是，在单位圆上取无穷多个点$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，其中 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-s^2}{1+s^2}$，$s$ 为有理数，那么这些点无三点共线，并且每两点之间的距离是有理数.

熟悉反演的人，不难看出，如果以⊙O 上一点(例如⊙O 与 y 轴的交点 P)为反演中心，2 为反演半径作反演，那么上面⊙O 上的点变成一条直线(过 y 轴与⊙O 的另一交点 Q，并且与⊙O 相切的直线)上的一些有理点.

104. 覆　　盖

平面上有一个半径为 1 的圆及一些带形. 带形即两条平

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

行直线所夹的图形，平行线称为带形的边，平行线的距离称为带形的宽.

如果这些带形的宽的和为 100，证明可将这些带形平移，使得圆被它们完全覆盖.

注意：这些带形不都是平行的，否则就太容易了（只要宽的和$\geqslant 2$，就可以覆盖了）.

我们可以证明稍强一点的结论：一个边长为 2 的正方形（包括边界及内部），可以被这些带形（经过平移）完全覆盖.

首先，带形的宽中如果有$\geqslant 2\sqrt{2}$的，结论显然成立. 因此，我们设带形的宽都$<2\sqrt{2}$.

不妨设正方形的一边与 x 轴平行，另一边与 y 轴平行. 将带形分为两类，一类边的斜率>0，另一类边的斜率<0.（斜率为 0 的可放在任一类）. 不妨设第一类的宽的和$\geqslant \frac{100}{2}=50$.

将第一类的带形按斜率从大到小的次序排成L_1、L_2，…（斜率相同的可以合成一个）.

如图 184，先用 L_1 去盖，盖住正方形 $ABCD$ 的右上角 A 及 AB 上的 AA_1. 再用 L_2 盖住 AB 上的 A_1A_2，……直至盖到右下角 B 及 BC 上的 BB_1. 再继续盖 BC 上的 B_1B_2，……带形依次去覆盖，正方形的边则依 $A\to B\to C\to D\to A$ 的顺序，一段接一段地被带形覆盖. 因为边上被带形盖住的线段不小于带形的宽，只有在顶点处可能“浪费”一个带形，所以覆盖正方形的整个周长最多需宽的和为

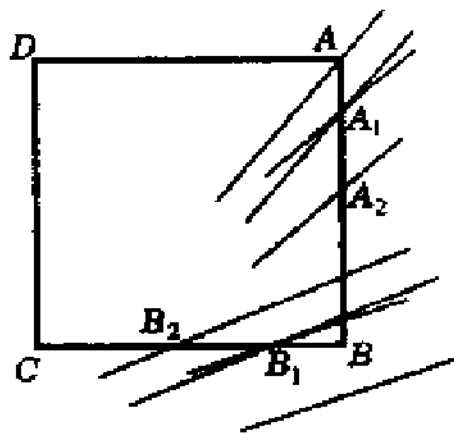


图 184

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

$$4\times(2+2\sqrt{2})<20.$$

远小于50，所以这些带形覆盖正方形$ABCD$的周长绰绰有余.

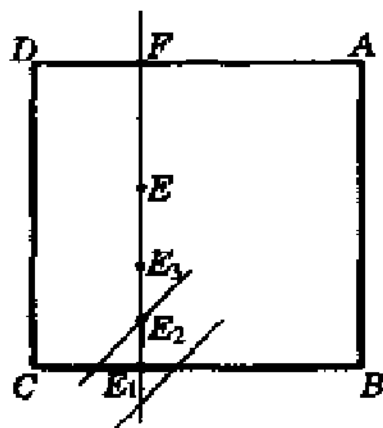


图 185

对于正方形 $ABCD$ 内任一点 E. 过 E 作 AB 的平行线交 BC 于 E_1，交 AD 于 F(图 185).

盖住 E_1 的带形，在 E_1F 上盖住一段 E_1E_2，接下去的带形也在 E_1F 上盖住一段. 由于它的斜率比前一个小，所以 E_2 必在这个带形内部. 于是这两个带形盖住 E_1F 上的一段 E_1E_3. 如此继续下去，这些带形盖住 E_1F 上的一段(没有空隙). 当带形盖住 D 时，这些带形(从盖住 E_1 的直到这个盖住 D 的)已经将整个 E_1F 完全盖住，当然也盖住了 E 点.

因此正方形 $ABCD$ 被这些带形完全覆盖.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

（十一）在 前 头

105. 问题征解（一）

一本书，应当留几个问题供人思考.

下面一道问题，征求读者的解答.

在$\triangle ABC$中，$\odot O_1$与CA，AB相切，$\odot O_2$与$\odot O_1$及AB，BC相切，$\odot O_3$与$\odot O_2$及BC，CA相切，$\odot O_4$与$\odot O_3$及CA，AB相切，$\odot O_5$与$\odot O_4$及AB，BC相切，$\odot O_6$与$\odot O_5$及BC，CA相切．求证：$\odot O_6$与$\odot O_1$相切.

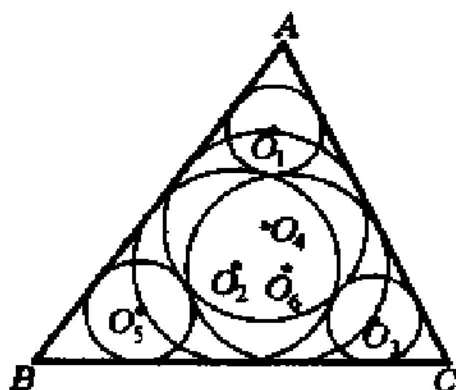


图 186

106. 问题征解（二）

对于一个图形F，如果能作一条与F无公共点的直线，使F分成两个部分，分别在这条直线的两侧，那么F就称为可分离的；否则就称为不可分离的.

例如F由两个外离的圆组成，那么F就是可以分离的．而当F由两个相交的圆组成时，F是不可分离的.

注意在F由三个两两外离的圆组成时，F不一定是可以分离的．图187中三个圆两两外离，但它们组成的图形却是不

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com

可分离的.

已知 n 个半径分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的圆不可分离，证明这些圆可用一个半径为

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

的圆覆盖.

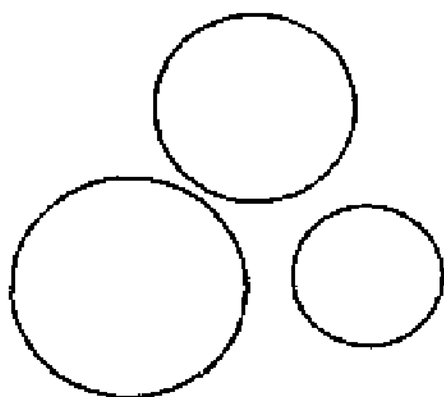


图 187

本题曾在《数学通讯》上征解多年，未得到正确的答案. 很多人认为 n 个圆不可分离，则去掉一个圆后仍不可分离. 这是不对的. 图 187 即表明去掉一个圆后，剩下的圆有可能是可以分离的.

在 L. Fejes Tóth 的名著《Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum》(Springer-Verlag, 1953)中就有这个问题，可惜国内很少有人见过这本书.

欢迎访问《怎样解题》
http://maths352.bokee.com